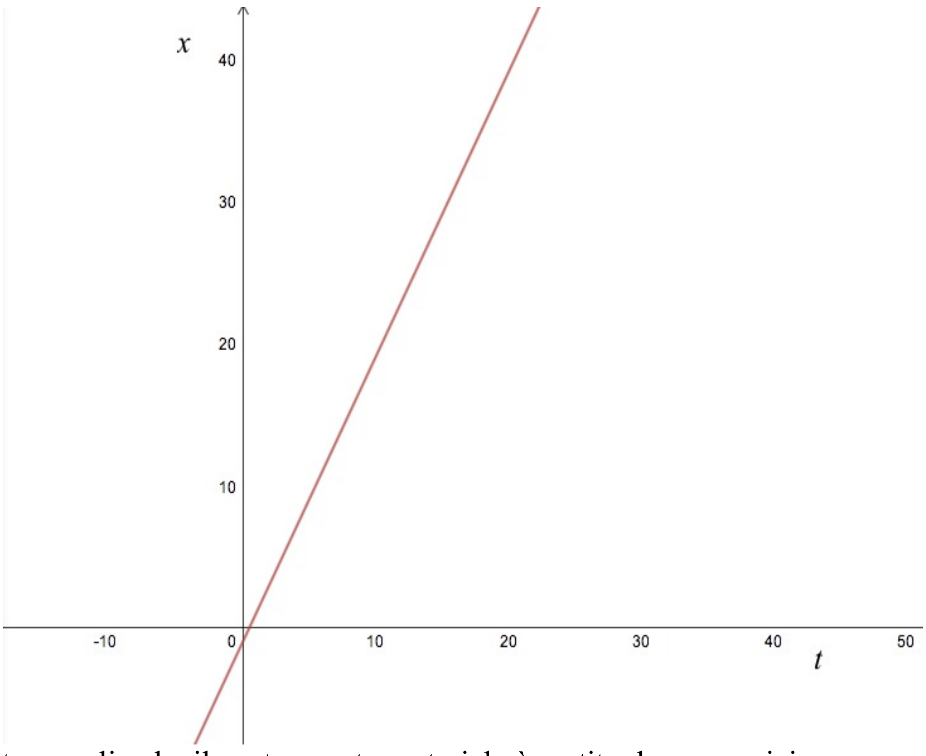
Studio sulla cinematica del punto materiale

La cinematica è la descrizione matematica del movimento dei corpi nello spazio. La peculiarità della cinematica è quella di prevedere posizioni, velocità e accelerazioni - future, presenti e passate - di qualsivoglia punto materiale che sia oggetto di studio; ciò in base ai dati disponibili sulle sue condizioni iniziali.
E' bene notare che questo tipo di studio è relativamente più semplice da effettuarsi su un punto materiale che per definizione è un corpo senza dimensioni, o con dimensioni trascurabili.
Andando infatti ad analizzare la cinematica di un corpo provvisto di notevole estensione dimensionale, si constaterà che il suo moto è soggetto a complicazioni quali: fenomeni vibrazionali dipendenti da caratteristiche strutturali, incertezza sulla metodologia di misura per coordinate (ad es. se non si prende come punto di riferimento il suo centro di massa o l'estremità del corpo nel suo verso direzionale, si ha indecisione nel determinare quando questo è obbiettivamente in una coordinata rispetto che in un altra, data la sua estensione).

Al fine di evitare inutili complicazioni, consideriamo un punto materiale che viaggia in uno spazio. Volendo misurare le proprietà del suo moto, appare chiaro che ciò risulta innaturale senza prendere in considerazione un riferimento in funzione del quale queste proprietà si evolvono.
E' questa la ragione per cui si prende in considerazione il tempo, in funzione del quale si ha una soddisfacente descrizione del moto.
Indicheremo con *x* la distanza percorsa dal punto e useremo come unità di misura i metri.
Indicheremo con *t* il tempo, e useremo come unità di misura i secondi.
Essendo, come detto prima, la distanza percorsa da un punto materiale una funzione del tempo, prenderemo come esempio il grafico della funzione:

$$x(t) = 3\text{t} - 2 \quad (1.0)$$



Il grafico illustra meglio che il nostro punto materiale è partito da una posizione $x = -2$ [m] nell'istante $t = 0$ [s] e che ha percorso uniformemente lo spazio con un comportamento dettato dalla legge (1.0). Convenzionalmente l'operazione di misurazione prende inizio dall'istante *0* [s], pertanto possiamo trascurare lo spazio percorso dal punto negli istanti precedenti (che assumono valori negativi e corrispondono a un tempo nel passato).

E' importante pensare la funzione come a una descrizione definita del comportamento del punto materiale. Data questa descrizione, saremo in grado di predire la posizione del punto per ogni valore temporale positivo.

Dando come input il valore *t=5[s]*, sapremo in che posizione sarà il punto dopo *5 secondi* dall'inizio della misurazione, e così via, per qualsivoglia valore di *t*:

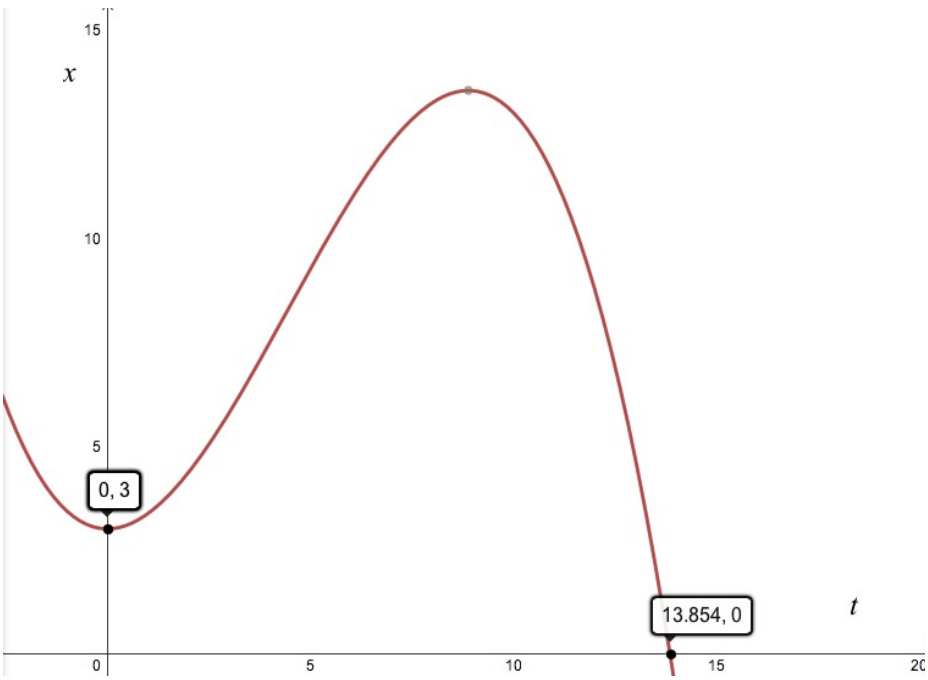
- $x(5)=3(5)-2=15-2=13\,metri$
- $x(12)=3(12)-2=36-2=34\,metri$

Notiamo da queste operazioni che in un intervallo di tempo $\Delta t=(12-5)s=7\mathrm{s}$ il punto ha percorso uno spazio $\Delta x=(34-13)m=21\,metri$. Il rapporto tra queste due misurazioni ci permette di calcolare il *coefficiente angolare* della nostra funzione:

$$m=\frac{(\Delta x)}{(\Delta t)} \quad = \quad v_{media}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Arriviamo quindi a discutere una delle proprietà della funzione x(t). Il rapporto tra i cambiamenti di *x* in un intervallo di tempo *t* corrisponde alla velocità media, che è una proprietà intrinseca della funzione iniziale. E' tuttavia questa un informazione approssimativa, e ciò lo possiamo constatare dallo studio della seguente funzione:

$$x(t)=-0.03\mathrm{t}^3+0.4\mathrm{t}^2+3$$



Il punto parte da *x=3* e acquista velocità per poi fermarsi un istante e tornare indietro, ciò fino alla posizione *x=0*. Si potrà notare che il punto ha variato la sua velocità, fino a fermarsi e tornare indietro (velocità con valore negativo). Ci si potrà accorgere dunque che, in questo caso, l'informazione sulla velocità media del punto da *t=0 [s]* e *t=13.85 [s]* non equivale a una descrizione dettagliata del suo moto ma a un valore complessivo. In breve, è come se dopo la partenza del punto si spegnessero gli strumenti di rilevazione per poi riaccenderli dopo *13 secondi* e constatare che il punto ha percorso un tratto Δx a ritroso, *3 metri* più indietro della sua posizione iniziale. Eppure nulla vieta che il punto - mentre la nostra strumentazione era spenta - abbia potuto viaggiare a velocità elevate per poi decelerare, tornare indietro, e poi avanti ancora ed ancora fermarsi e ritornare indietro: semplicemente abbiamo scelto di non rilevarlo. Tale informazione approssimativa è detta *velocità media*.

Un modo più ottimale per descrivere il comportamento del punto ci è fornito dalla proprietà c.d. *velocità istantanea*, definita come segue:

$$v=\frac{dx}{dt} \quad \text{che equivale a} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{(t+\varepsilon)-t} \quad (1.1)$$

che non è altro che la formula della velocità media calcolata su un intervallo infinitesimale di tempo, definita come il limite per $\varepsilon\to 0$.
Diremo quindi che la velocità istantanea è la *derivata* della posizione rispetto al tempo. Dal differenziale di (1.1) otteniamo quindi la relazione tra velocità istantanea e infinitesimi di spazio percorso:

$$dx=v(t)dt$$

Così facendo, possiamo ammettere che l'ammontare totale dei cambiamenti di *v(t)*, in un intervallo di tempo *t*, ci dà informazioni sullo spazio percorso. Integrando ambo i membri avremo:

$$\Delta x=\int_{x_0}^{x} dx=\int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Il primo integrale diventa facilmente $x-x_0$ e perciò:

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)dt \quad (1.2)$$

Dove x_0 rappresenta la posizione iniziale del punto nell'istante t_0 ed è inoltre, se vogliamo, una conseguenza matematica del principio di integrazione (*i.e.* processo inverso della derivazione), che ammette l'esistenza di una qualsivoglia costante, la quale durante il processo di derivazione era stata precedentemente annullata.
Per *v=costante*, avremo:

$$x(t)=x_0+v(\int_{t_0}^{t} dt)$$

che immediatamente diventerà:

$$x(t)=x_0+v(t-t_0)$$

considerando $t_0=0$:

$$x(t)=x_0+vt \quad (1.3)$$

Questa condizione è definita come ***moto rettilineo uniforme***. Descrive cioè un moto omogeneo, con una velocità costante (da ciò “rettilineo”). Abbiamo quindi fatto luce sull'importanza dello sfruttamento delle proprietà di una funzione: l'inclinazione della retta descritta in funzione del tempo, ci mostra informazioni sulla velocità del punto materiale definita perciò come la derivata della posizione:

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}x_0+\frac{d}{dt}vt$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt}x(t)=v$$

E' importante notare che, derivando due volte *x(t)*, avremo informazione sulla *curva* della funzione, e cioè l'accelerazione, che informalmente è definita come:

$$a_{media}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

vale a dire la variazione di velocità nell'intervallo di tempo considerato. Anche questa informazione, come la velocità media, è un informazione complessiva del moto, mentre l'accelerazione istantanea è data derivando due volte la funzione posizione. Dal momento che stiamo trattando il caso di *moto rettilineo uniforme*, *l'accelerazione sarà nulla*, e infatti, derivando due volte la (1.2) avremo:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)=\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d}{dt}v=0$$

Studieremo ora il caso in cui il moto è caratterizzato da un *accelerazione* costante. L'accelerazione ha un valore fondamentale in fisica poiché essa, in relazione con l'inerzia del corpo che va ad accelerare, ci da informazioni sulla forza premente che *cambia lo stato* del moto. E' proprio questo infatti, il punto cruciale, e cioè che l'accelerazione ha la facoltà di cambiare lo stato del moto, di arrestarlo, o di iniziarlo. Anche qualora potesse assumere anch'essa valori negativi, ci si deve tener lungi dal confondere il significato di questo valore negativo con quello della velocità negativa. L'accelerazione negativa indica un'*opposizione* al moto (in base al sistema di coordinate che si è scelto) che tenderà quindi a rallentare il punto materiale, fino ad annullare il suo moto, mentre la velocità negativa indica un moto a ritroso.
Andiamo ora ad analizzare, riprendendo quanto detto prima, il caso dell'accelerazione istantanea, definita come la seconda derivata della posizione e perciò derivata della velocità in funzione del tempo:

$$\frac{dv}{dt}=a$$

Analizziamo ora il differenziale, per svelare la relazione tra gli incrementi delle variabili

$$dv=a(t)dt \quad (1.4)$$

e cioè che un infinitesimo incremento della velocità è dovuto all'applicazione di un accelerazione per un infinitesimo di tempo. Dovrà perciò essere, integrando ambo i membri dell'espressione:

$$\Delta v=\int_{v_0}^{v} dv=\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

Anche qui, l'integrazione è di livello elementare, in presenza di *a=costante*, la velocità finale del punto materiale dipenderà dalla sua velocità iniziale sommata all'accelerazione.

$$v - v_0 = a \int_{t_0}^{t} dt = a(t - t_0)$$

Infine, ponendo $t_0 = 0\,s$ avremo:

$$\boxed{v(t) = v_0 + at} \quad (1.5)$$

Abbiamo quindi ottenuto una condizione di **moto uniformemente accelerato**. La velocità finale è qui una funzione del lasso temporale in cui è stata applicata l'accelerazione. Che questa sia poi opposta o concorde al moto, andrà ad influenzare il comportamento, tale che quando $v_0 + (-at) = 0$ e cioè $v_0 = at$ si avrà l'arresto del moto.
Andiamo ad applicare la nuova funzione v(t) alla (1.2)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + at)\, dt$$

Per cui avremo, per *a=costante*:

$$x(t) = x_0 + (vt - vt_0) + a \int_{t_0}^{t} \frac{t^{(1+1)}}{(1+1)} dt$$

Finalmente, ponendo $t_0 = 0\,s$ arriviamo a:

$$\boxed{x(t) = x_0 + vt + \frac{1}{2} a t^2} \quad (1.6)$$

La quale è definita come <u>legge oraria</u> per un moto soggetto ad accelerazione costante. La posizione del nostro punto materiale dipenderà dalla sua posizione iniziale e dalle sue condizioni di velocità e accelerazione. Conoscendo la legge oraria di un punto materiale, possiamo quindi derivarne la velocità in ogni istante e l'accelerazione che subisce, e di conseguenza, conoscendone la massa, saremo in grado di porre luce sulla forza agente. E' vero anche l'inverso: conoscendo la forza e quindi l'accelerazione che subisce un corpo, saremo in grado di predirne la posizione futura in ogni istante, purché il sistema rimanga isolato e la forza costante. Questa è una delle idee fondamentali della fisica, e ne esporremo brevemente un esempio:

Il moto di un punto materiale in caduta libera verso la superficie terrestre è descritto dalla legge oraria $h(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2$, dove h_0 rappresenta l'altezza da cui il punto ha iniziato la sua discesa. Si noti il fattore quadratico $-\frac{1}{2} g t^2$, indicante che l'accelerazione avviene nel verso opposto all'asse delle ordinate (verso il basso); il che è ovviamente un fattore convenzionale.
Ne deriveremo dunque l'accelerazione in gioco con una rapida differenziazione:

$$\frac{d^2}{dt^2} h(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} - g t = -g$$

Abbiamo quindi constatato che l'accelerazione generatrice del moto di caduta del punto materiale è ovviamente l'accelerazione gravitazionale.

Esercizio 1.0: Nota la funzione accelerazione $a(t) = -0.5\text{t}$, si calcoli la posizione del punto

materiale nell'istante t=13.5 [s].
In fisica, potrebbe essere utile talvolta determinare una legge sull'accelerazione in funzione dello spazio percorso, ci troveremo quindi in presenza di una funzione a(x). Applicando il concetto di derivazione della funzione di una funzione avremo $a(x)=v[x(t)]$ e cioè:

$$a(x)=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\rightarrow a(x)=\frac{dv}{dx}v$$

Sfruttando i differenziali ci ritroveremo $a\,dx=v\,dv$, e cioè che un infinitesimo cambiamento della posizione causerà un infinitesimo incremento della velocità. Integrando avremo:

$$\int_{x_0}^{x} a(x)dx=\int_{v_0}^{v} v\,dv \quad \text{e cioè} \quad \int_{x_0}^{x} a(x)dx=\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}v_0^2 \quad (\S.0)$$

Ci presteremo allo studio di questo tipo di moto presentando un concetto in cui possa essere sfruttato d'esempio. Nel caso sia *a=costante*, ricaveremo: $v^2=v_0^2+2a\,\Delta x$.

Cenni sul moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Sia $a=-kv$, con k che rappresenta una costante. L'azione deceleratrice (in quanto l'accelerazione è discorde) farà si che il moto si arresti entro un certo periodo, obbedendo a una legge che ricaveremo tra breve. Definiamo perciò l'equazione differenziale:

$$\frac{dv}{dt}=-kv \quad \text{e da ciò,ricaviamone il rapporto tra i differenziali:} \quad \frac{dv}{v}=-k\,dt$$

e integriamo ambo i membri:

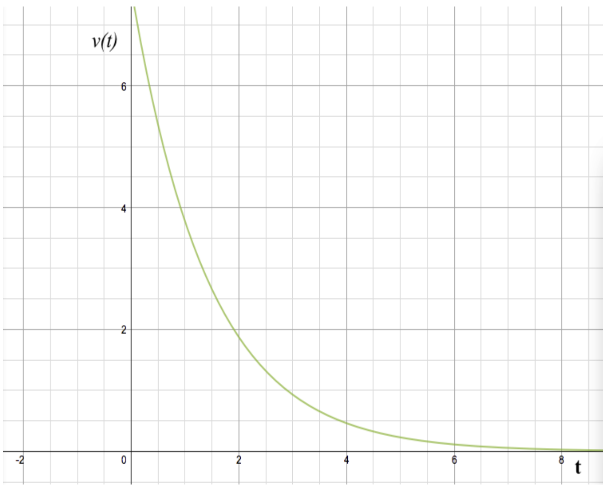
$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\int_{0}^{t}-k\,dt$$

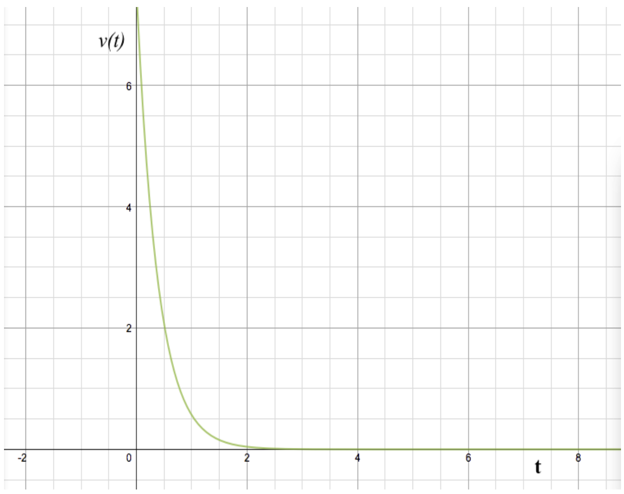
Di conseguenza ci ritroveremo:

$$\ln v-\ln v_0\equiv\ln\frac{v}{v_0}=-kt$$

Dove v_0 è necessariamente diversa da zero, in quanto altrimenti non ci sarebbe stato moto iniziale e non ci saremmo posti il problema. Prendiamo la funzione inversa e ricaviamo:

$$e^{\ln\frac{v}{v_0}}=e^{-kt} \quad \text{e perciò} \quad v(t)=v_0e^{-kt}$$



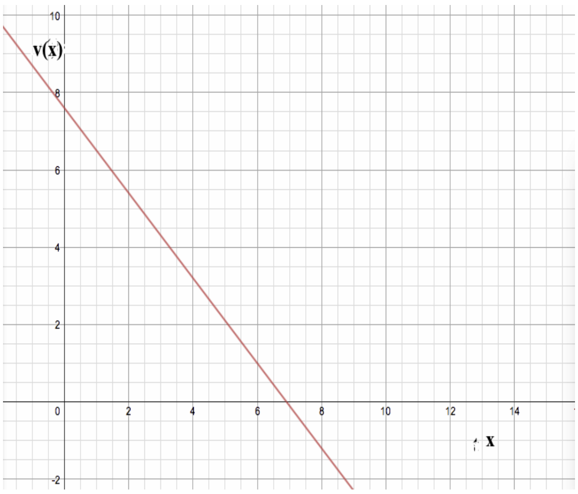


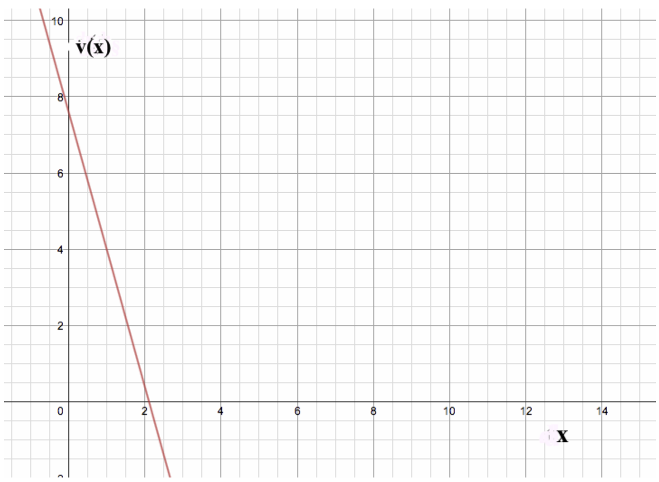
Questa funzione esponenziale descrive in maniera ottimale il processo di rallentamento del moto, innescato dall'azione rallentante della costante *k*,che incide esponenzialmente con un verso negativo. Si noti che all'aumentare del valore di *k*, si manifesterà una decrescita più rapida di *v(t)*.

Possiamo quindi re-introdurre il concetto di accelerazione *a(x)*,(in questo caso decelerazione), dal quale ne ricaveremo un grafico che descriverà la decrescita della velocità in funzione dello spazio percorso. Sia perciò $a(x)=v[x(t)]$ e quindi $a(x)=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=-kv$ da cui $a(x)=\frac{dv}{dx}\cancel{v}=-k\cancel{v}$ dai differenziali avremo $dv=-k\,dx$, che andremo integrando:

$$\int_{v_0}^{v} dv=-k\int_{0}^{x} dx \quad \text{e da cui ricaveremo} \quad v(x)=v_0-kx$$

La quale è una funzione lineare, al contrario di quella esponenziale esposta in precedenza, ma che





ben descrive anch'essa il decrescere del moto, seppur in maniera indiretta. Si noti l'importanza, anche qui, della variabile *k*.

Per completare l'esposizione del moto rettilineo smorzato esponenzialmente, andremo a indagarne la legge oraria della posizione in funzione del tempo. Dalla (1.2) avremo:

$$x(t)=x_0+\int_0^t v_0 e^{(-kt)}\,dt$$

Che integreremo in:

$$x(t)=x_0+v_0\int_0^t e^{(-kt)}\,dt \quad \text{e cioè} \quad x(t)=x_0+v_0\left(\frac{1}{-k}\right)[e^{(-k(t))}-e^{(-k(0))}]$$

Da cui, riscrivendo dovutamente, avremo:

$$x(t)=x_0-\frac{v_0}{k}[e^{(-kt)}-1] \quad \text{e finalmente:} \quad x(t)=x_0+\frac{v_0}{k}(1-e^{(-kt)})$$

La quale è la legge oraria del moto rettilineo smorzato esponenzialmente. Questo tipo di moto è abbastanza comune e la sua descrizione è sufficientemente rigorosa perché ritragga fedelmente la realtà. I moti vari possono infatti risultare estremamente complicati, soprattutto se presa in considerazione la forza d'attrito frenante dei fluidi quali l'aria. Per ora ci cimenteremo nello studio di moti vari più congeniali e immediati, tra cui il moto armonico semplice, per poi passare allo studio di moti curvilinei nel piano.

Il moto armonico semplice è un moto vario definito dalla funzione:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \Phi)$$

Dove i simboli $\omega t + \phi$, argomento della funzione seno, sono detti "*fase*". Ci danno informazioni rispettivamente su pulsazione (ωt) ed eventuale punto di partenza della misurazione dell'oscillazione (Φ), che può essere scelto arbitrariamente. La traiettoria è un oscillazione periodica, e, trattasi di una funzione sinusoidale, oscillerà con ampiezza A tra i valori -1 e 1, con periodo 2π. Volendo si può scegliere come inizio della misurazione l'istante t= π e attribuire $\Phi = \pi \, oppure \, 0$, da cui otterremo $x(t) = 0$. Andiamo quindi a definire il concetto di periodo di oscillazione, equiparando due funzioni x(t) in due istanti diversi, rispettivamente una che ha percorso un tratto 2π e l'altra sul punto di partenza. Definiamo il periodo come il tempo impiegato per compiere un oscillazione completa $T = t' - t$. Poniamo x(t')=x(t), eguagliando gli argomenti: $\omega t' + \Phi = \omega t + \Phi + 2\pi$, che riscriviamo $\omega(t' - t) = 2\pi$, e cioè $\omega(T) = 2\pi$ da cui

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ che è il periodo di oscillazione della funzione.

così facendo mettiamo luce sul concetto di pulsazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Da qui capiamo che periodi di oscillazione lunghi corrisponderanno a pulsazioni deboli, e periodi brevi significheranno pulsazioni forti. E' importante introdurre quindi il concetto di frequenza:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Osserviamo che frequenza e pulsazione sono direttamente proporzionali tra loro e definiamo la frequenza come il *numero di oscillazioni in un periodo*. Deduciamo che f che avrà lo stesso significato di ω, seppur con dimensioni diverse,ed è chiaro come mai la pulsazione è spesso chiamata *frequenza angolare*. Così come abbiamo fatto per il moto rettilineo, andiamo a derivare le funzioni velocità e accelerazione del moto armonico semplice.

Definiamo la funzione velocità del moto armonico come la derivata della funzione posizione:

$v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ da cui seguirà:

$$\frac{d}{dt} A\sin(\omega t + \Phi) = A \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \Phi) \frac{d}{dt}(\omega t + \Phi) \quad \text{e perciò:}$$

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \Phi)$$

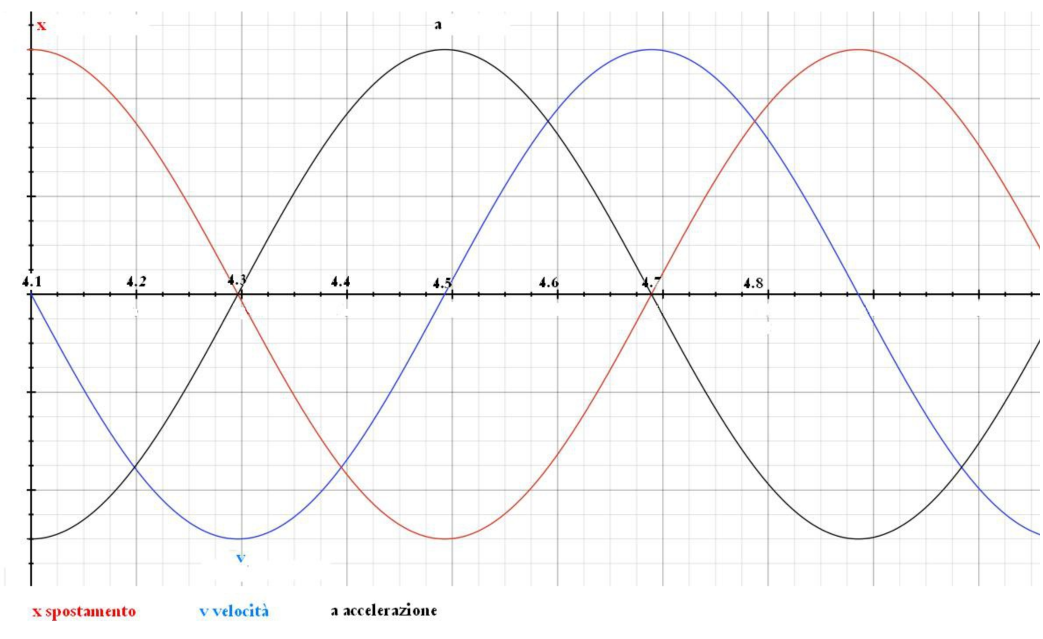


Fig. 5: relazione fra spostamento, velocità ed accelerazione nel moto armonico

Da cui, derivando un'altra volta, otteniamo: $a(t)=-\omega^2 A\sin(\omega t+\Phi)$, l'accelerazione. A seguire, i grafici delle 3 funzioni:
Si osservi che agli estremi dello spostamento, l'accelerazione risulta massima, con verso opposto allo spostamento, pronta a ripartire verso l'altra direzione, e la velocità risulta minima. Mentre al centro dello spostamento la velocità risulterà massima, partecipe dello slancio ricevuto dall'accelerazione, mentre quest'ultima risulta essere zero. Proveremo subito tutto ciò matematicamente servendoci della funzione a(x) studiata sopra.

Iniziamo sostituendo:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\Phi)\rightarrow a(t)=-\omega^2 A\sin(\omega t+\Phi)$$

E quindi:

$$a(t)=-\omega^2 x$$

Abbiamo quindi ricavato che nel moto armonico semplice l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con segno negativo. Introduciamo quindi un concetto importante, e cioè che la condizione necessaria e sufficiente perché un moto sia armonico è data dall'equazione:

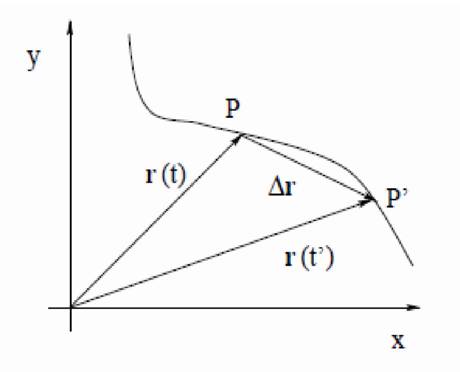
$$\frac{d^2 x}{dt^2}+\omega^2 x=0 \quad (\S.1)$$

Nota come *equazione differenziale del moto armonico*. Le uniche e sole soluzioni ammesse nel campo reale sono le funzioni seno, coseno e le loro combinazioni lineari. Dopo questa osservazione, ci risulta ambivalente utilizzare l'una o l'altra soluzione, con i dovuti aggiustamenti.
Si noti infatti che le funzioni seno e coseno sono relazionate tra loro sfasando l'argomento di $\frac{\pi}{2}$, e pertanto avremo $x(t)=A\sin(\omega t+\Phi)=A\cos(\omega t+\Psi)\, con\, \Psi=\Phi-\frac{\pi}{2}$.

Questo tipo di moto trova ampia applicazione in tutti i campi, dalla fisica all'ingegneria, per ora lo abbiamo solo introdotto, ma la sua applicazione andrà vista in maniera più dettagliata.

Ci muoveremo ora allo studio dei moti vari curvilinei, detti **moti nel piano**. Nell'interesse di studiare tipi di traiettorie più complicate, si nota l'importanza dello sfruttamento di un ente matematico in grado di dare informazioni sulla direzione del movimento per ogni istante, i vettori. Al fine di descrivere in maniera convenzionale e dettagliata ogni tipo di moto, sono stati adottati vari sistemi di riferimento. Tra questi distinguiamo in metodi intrinsechi quel tipo di misura indipendente ai cambiamenti di sistemi di coordinate, come le coordinate curvilinee, e in metodi dipendenti dai sistemi di coordinate, come le coordinate cartesiane e polari. Consideriamo il nostro punto materiale P, individuato da un raggio vettore che chiameremo **r**(t), andremo ad analizzare le proprietà del moto prima con il metodo delle coordinate curvilinee, poi cartesiane e polari. Le coordinate cartesiane in relazione con le coordinate polari presentano le seguenti caratteristiche:

$$x=r\cos(\theta),\, y=r\sin(\theta),\, r=\sqrt{x^2+y^2},\, tg(\theta)=\frac{y}{x}$$



Il punto P è individuato dal raggio vettore **r**(t), il cui spostamento avviene in funzione del tempo, ed è scomponibile in:

$$\vec{r}(t)=\overline{OP}=x(t)\eta_x+y(t)\eta_y$$

Dove $\eta_{(x,y)}$ sono i versori, e cioè vettori di modulo unitario indicanti la direzione, invariabili nel tempo in modulo, ma variabili solo in direzione. I versori ci risultano di estrema importanza, perché ci permettono di orientarci ottimamente nella descrizione di moti davvero complessi. Essi,se vogliamo, sono i nostri "cartelli stradali". Andiamo ad analizzare cosa succede quando il raggio vettore compie uno spostamento infinitesimo lungo la traiettoria di P; in particolare, andiamo a definire la velocità vettoriale di P l'incremento:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Che scriveremo quindi:

$$v=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Che è appunto la *velocità vettoriale* del raggio vettore rispetto al tempo t.
Proviamo a immaginare una porzione infinitesima di intervallo $\Delta\vec{r}$ nella figura, ci accorgeremo che per valori al limite $\Delta\vec{r}$ risulta tangente alla traiettoria nel punto P. Il suo significato può perciò essere approssimato a una minuscola porzione di traiettoria detta ds . Potremo quindi scrivere la relazione $d\vec{r}=ds\,\eta_T$, dove η_T è il versore determinante la direzione del punto lungo la tangente alla traiettoria in ogni istante di tempo. Immaginiamo perciò il moto nella traiettoria come un susseguirsi continuo di cambiamenti infinitesimali, tra i quali la direzione. Riscriveremo dunque :

$$v=\frac{ds}{dt}\eta_T=v\,\eta_T \quad (1.7)$$

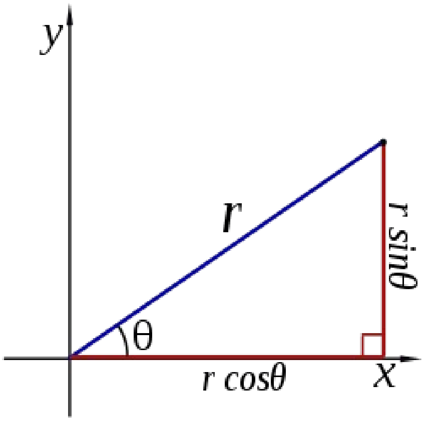
Che definiamo *velocità istantanea* del punto P, il cui valore è dato dal modulo $\frac{ds}{dt}$ e la direzione descritta da η_T , versore della tangente alla traiettoria.
Abbiamo definito, per intervalli infinitesimi, l'incremento $d\vec{r}=ds\,\eta_T$, ma bisogna prestare attenzione a non confondere i due concetti: raggio vettore e i suoi incrementi da una parte, spostamento effettivo dall'altra. Uno è la corda, l'altro è l'arco. Per esempio, il punto P potrebbe percorrere un orbita chiusa, da cui risulterebbe $\Delta\vec{r}=0$, ma $\Delta s\neq 0$. E' da notare che le proprietà che abbiamo descritto precedentemente sono dette *intrinseche*, perché sono indipendenti dai cambiamenti dei sistemi di coordinate. E' facile comprendere perché: per quanto si possa spostare l'origine *O* del sistema o ruotarne gli assi, certe proprietà come direzione, modulo e verso risultano invariate, dato che la curva è sempre la stessa. Può variare **r**(t), ma l'incremento $d\vec{r}$ rimane invariato, perché le caratteristiche del moto sono le stesse ovunque, con qualsiasi sistema di coordinate.
Vediamo ora l'espressione della **velocità secondo il sistema di *coordinate cartesiane***. Definiamo la velocità come:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\eta_x+\frac{dy}{dt}\eta_y=v_x\eta_x+v_y\eta_y \quad \text{di modulo} \quad |v|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

E, detto Φ l'angolo tra il vettore ***v*** e l'asse x:

$$tg(\Phi)=\frac{v_y}{v_x}$$

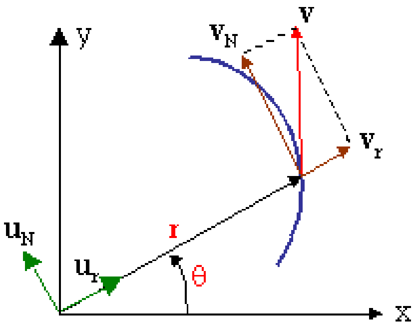
Proseguiremo quindi con l'analisi delle ***coordinate polari*** **della velocità**. Questo tipo di coordinate risulta essere di notevole utilità nella descrizione di certi tipi di moto come quello *circolare*, che vedremo in seguito, e in generale di moti dotati di simmetria circolare. Introduciamo i versori di riferimento: η_r, η_θ , i quali si muovono nel tempo, cambiando direzione. Come mostrato in figura, qui il raggio vettore è definito direzionalmente dal versore η_r



pertanto scriveremo $\vec{r} = r\,\eta_r$, e la velocità diventerà:

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\eta_r) = \frac{dr}{dt}\eta_r + r\frac{d\,\theta}{dt}\eta_\theta \quad (1.8)$$

Dove, per il secondo termine, abbiamo utilizzato la regola di derivazione di un versore, una variazione direzionale rispetto a una frazione di tempo, ottenendo un vettore *perpendicolare* al versore η_r , come mostrato in figura:



La velocità presenta quindi due componenti: la componente v_r individuata dalla derivata del vettore **r**,perciò parallela a esso, come illustratoci dal versore η_r , e la componente v_θ , perpendicolare a v_r . La prima è definita *velocità radiale*, la seconda *velocità trasversa*. La loro composizione ci da come risultante il vettore velocità, avente modulo:

$$|v| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\,\theta}{dt}\right)^2}$$

Potremo infine servirci del processo di integrazione per ottenere la legge oraria del punto P:

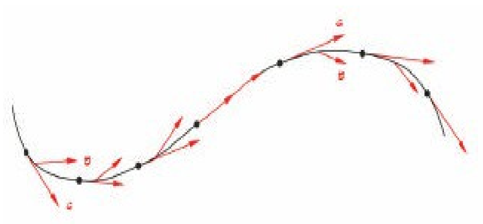
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt$$

Procedendo all'operazione per $\boldsymbol{v}$(t) integrandone le rispettive componenti cartesiane:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\eta_x\int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt+\eta_y\int_{t_0}^{t} v_y(t)\,dt$$

Procediamo ora con l'analisi dell'accelerazione nel piano. Anche per questo studio inizieremo con l'introduzione alle coordinate curvilinee (intrinseche), per poi proseguire con le coordinate cartesiane e quindi polari. Definendo l'accelerazione come quella proprietà del moto con la facoltà non solo di variare il modulo della velocità, ma anche di variare la direzione, ci aspetteremo che questa presenti due componenti. Osservando la figura, si noterà che l'accelerazione (in m odulo) non è mai parallela alla velocità, e tende ad opporsi, diretta verso la concavità della curva che rappresenta la traiettoria. L'accelerazione è, come si sa, la derivata della velocità rispetto al tempo, ed è una grandezza vettoriale.

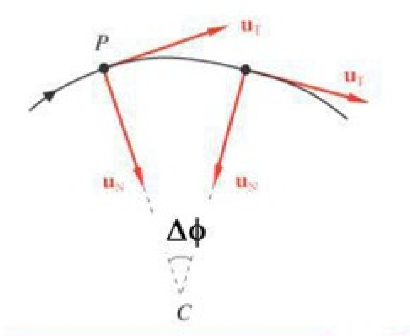
$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



Procediamo quindi, utilizzando la (1.7):

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}(v\,\eta_T)=\frac{dv}{dt}\eta_T+v\frac{d\Phi}{dt}\eta_N \quad (1.9)$$

Compaiono dunque le due componenti che immaginavamo: la prima rappresenta il cambiamento in modulo della velocità rispetto al tempo, ed è, come ci suggerisce il versore, parallela alla velocità; la seconda componente rappresenta il cambiamento di direzione rispetto al tempo, ed è un vettore perpendicolare a η_T . La prima la definiamo *accelerazione tangenziale*, la seconda *accelerazione normale* o *centripeta*. Apparirà subito chiara, al lettore informato, l'intima connessione tra questi risultati e le le forze in gioco in un moto circolare. Possiamo immaginarci l'accelerazione centripeta come il risultato di una forza che costringe continuamente il punto a cambiare la sua traiettoria, curvandola. Un esempio abbastanza noto lo troviamo nel moto dei pianeti, dove la forza gravitazionale tende a curvarne le traiettorie, ottenendo le cosiddette “orbite ellittiche”. Concediamo un osservazione più approfondita al moto:



Possiamo osservare che per intervalli infinitesimi, (per $\Delta t\to 0$), le rette normali (i versori η_N) alla traiettoria in due punti molto vicini tra loro si intersecano e individuano un punto C, detto centro della curva osculatrice (circonferenza tangente a quel punto della traiettoria), della quale possiamo immaginarne una serie infinita tangente a ogni minuscolo punto della traiettoria. Potremo perciò esprimere ds come $R d\Phi$, dove R rappresenta il raggio $\overline{CP}$ (da non confondere con il raggio vettore). Al variare di P lungo la curva, cambieranno il valore di R e la posizione di C, i quali possono protrarsi all'infinito nei tratti rettilinei. Dal momento che $\frac{d\Phi}{dt}$ è una funzione composta del tempo attraverso la traiettoria, avremo:

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{d\Phi}{ds}\frac{ds}{dt} \text{ dove, essendo } ds=R\,d\Phi \text{ , avremo } \frac{d\Phi}{dt}=\frac{1}{R}v$$

E sostituendo nella (1.9) risulterà:

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\eta_T+\frac{v^2}{R}\eta_N$$

E in modulo:

$$a=\sqrt{a_T^2+a_N^2}=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{v^4}{r^2}}$$

I tipi di moto descritti dalle componenti accelerazione possono essere:

- Moto rettilineo vario: dove avremo $a_T>0$ e $a_N=0$
- Moto curvilineo vario: dove entrambe $a_T, a_N>0$
- Moto curvilineo uniforme: in cui $a_T=0$ $a_N>0$
- Moto rettilineo uniforme: in cui ovviamente $a_T=a_N=0$

Di nuovo, è importante specificare che quelle discusse sopra sono proprietà intrinseche del moto, invariabili rispetto al sistema di coordinate scelto.
Procediamo quindi con il loro studio nel **sistema di coordinate cartesiano**, dove avremo:

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\eta_x+\frac{dv_y}{dt}\eta_y=a_x\eta_x+a_y\eta_y$$

Se Φ è l'angolo che η_T forma con η_x , avremo:

$$a_x=\frac{dv}{dt}\cos(\Phi)-\frac{v^2}{R}\sin(\Phi)$$
$$a_y=\frac{dv}{dt}\sin(\Phi)-\frac{v^2}{R}\cos(\Phi)$$

Passiamo perciò alle ***coordinate polari*** **dell'accelerazione**. Re-introducendo i versori η_r, η_θ , ci serviremo di (1.8).

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\eta_r+r\frac{d\theta}{dt}\eta_\theta\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\eta_r\right)+\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\eta_\theta\right) =$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\eta_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\eta_r}{dt}+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\eta_\theta+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\eta_\theta+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\eta_\theta}{dt} \text{ ed essendo } \frac{d\eta_r}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\eta_\theta \text{ e}$$

$\frac{d\eta_\theta}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\eta_r$ (è come se stessimo derivando due volte un versore) avremo:

$$\vec{a}=[\frac{d^2 r}{dt^2}-r(\frac{d\theta}{dt})^2]\eta_r+[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}]\eta_\theta$$

Dove il primo termine rappresenta l'*accelerazione radiale* e il secondo termine l'*accelerazione trasversa*. Integrando tramite coordinate cartesiane otterremo la legge per **v**(t):

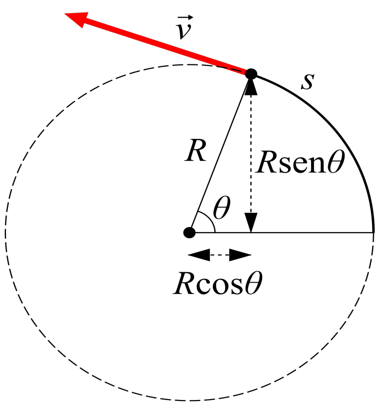
$$\vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)+\eta_x\int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt+\eta_y\int_{t_0}^{t} a_y(t)\,dt$$

Abbiamo quindi messo luce sulle variegate proprietà dei moti nel piano, descrivendone le caratteristiche e gli opportuni processi matematici. E' notevole l'utilità che possiamo ricavare da questo tipo di descrizione, e in base al problema fisico che affronteremo, potremo scegliere quale metodo utilizzare tra quelli citati. Iniziamo allora con un applicazione pratica, procedendo con l'analisi del moto circolare.

Il **moto circolare** è un moto nel piano avente come traiettoria una circonferenza. Distinguiamo in moto circolare uniforme e non uniforme. Possiamo descrivere questo tipo di moto utilizzando l'equazione della linea chiusa s(t), o tramite coordinate polari $\theta(t)$, relazionate da (si ricordi che la misura di un arco $s=R\theta$): $\theta(t)=\frac{s(t)}{R}$. Procediamo con il caso del moto circolare uniforme, dove si ha velocità costante in modulo. Per facilitare la comprensione re-introduciamo la (1.8):

$$\vec{v}=\frac{dr}{dt}\eta_r+r\frac{d\theta}{dt}\eta_\theta$$

E si osservi la figura:



Avevamo introdotto il concetto di raggio vettore **r**(t) nel contesto di un moto curvilineo vario nel piano, definendo la sua derivata $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$, dal momento che la sua posizione variava nel tempo, descrivendo la curva. In questo caso ci si accorge che il raggio vettore, essendo il raggio della circonferenza, rimane invariato nel tempo; possiamo quindi definire $\frac{dr}{dt}=0$. Di conseguenza nella (1.8) rimarrà solo la velocità trasversa. Nel moto rettilineo uniforme la velocità è quindi costante in modulo e tangente alla circonferenza in ogni suo punto. Vedremo subito perché, derivando la (1.7) in funzione del tempo, per ottenere l'accelerazione:

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}(v\eta_T)$$

Come detto, essendo $\frac{dr}{dt}=0$ lungo la direzione η_T (per orbite chiuse avremo $\Delta\vec{r}=0$, ma

$\Delta s \neq 0$) si ha:

$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\frac{dr}{dt})\eta_T + \frac{ds}{dt}\frac{d\theta}{dt}\eta_N = v(\omega)\eta_N = v(\frac{v}{R})\eta_N = \frac{v^2}{R}\eta_N$ Ne deduciamo che l'unica accelerazione agente su un moto circolare uniforme deve essere l'accelerazione centripeta, la quale agisce sul punto materiale curvando la sua traiettoria, ottenendo una circonferenza. Il moto è detto uniforme perché il modulo della velocità si mantiene costante, dato che l'unica componente è la velocità trasversa, che è una variazione angolare nel tempo (dovuta a una forza centripeta), e non una variazione di modulo. Definiamo perciò la variazione angolare nel tempo come la velocità angolare (già incontrata in precedenza):

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ricordiamo che $\frac{d\theta}{dt}$ è una funzione composta del tempo attraverso la traiettoria:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

Trovando il legame tra velocità angolare e tangenziale. Richiamando il fatto che la velocità radiale è nulla, dal momento che il raggio vettore è costante in modulo, avremo la velocità trasversale da (1.8): $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$, da cui ritroviamo $v = R\omega$ (solo specificando che l'origine sia il centro della circonferenza). Arriviamo perciò a ridefinire l'accelerazione centripeta, riscrivendo:

$$a_N = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

Come illustrato in figura, le coordinate polari sono in relazione con quelle cartesiane tramite le proiezioni $x(t) = r\cos\theta(t)$, $y(t) = r\sin\theta(t)$. Mentre avremo, nel caso del moto circolare uniforme, le semplici leggi orarie, in base al metodo che si utilizza:

- $s(t) = s_0 + vt$
- $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ che andrà a definire quindi:

$$x(t) = r\cos(\omega t + \theta_0) \quad \text{e} \quad y(t) = r\sin(\omega t + \theta_0)$$

Che non sono altro che due *moti armonici* di uguale ampiezza r, stesso periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$,sfasati di $\frac{\pi}{2}$. Il significato della pulsazione qui è uguale (come affrontato in precedenza) numericamente alla velocità angolare, ma ha significato diverso. Possiamo quindi esprimere $\omega = \frac{2\pi}{T}$, e reintroducendo il concetto di frequenza: $\omega = 2\pi f$. Quindi riscriviamo l'accelerazione centripeta come $a_N = (2\pi f)^2 R$, mentre la velocità tangenziale sarà data da: $\frac{v}{R} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \quad v = \frac{2\pi R}{T}$ o ugualmente da $v = 2\pi R f$.

Studiamo ora il caso del moto circolare *non* uniforme. Supponiamo quindi che oltre all'accelerazione centripeta, si aggiunga l'accelerazione tangenziale $\frac{dv}{dt}$ perpendicolare alla prima:

$$a = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

La quale può agire in verso opposto alla direzione di rotazione (che arbitrariamente consideriamo positiva nel verso orario), decelerando la rotazione, fino all'arresto. Risulta di notevole utilità esprimere l'accelerazione in funzione dell'angolo di rotazione, come fatto nel caso del moto rettilineo.

$a(\theta)=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\omega$ E quindi $a(\theta)d\theta=\omega d\omega$ che integriamo in:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} a(\theta)d\theta=\int_{\omega_0}^{\omega}\omega d\omega=\frac{1}{2}\omega^2-\frac{1}{2}\omega_0^2$$

In virtù di quanto affermato,analogamente a quanto fatto per il moto rettilineo possiamo integrare:

$$\omega(t)=\omega_0+\int_{t_0}^{t} a_T(t)dt$$
$$\theta(t)=\theta_0+\int_{t_0}^{t}\omega(t)dt$$

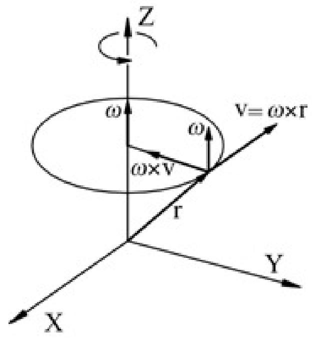
Da cui, considerando $a_T=costante$ e $t_0=0$ avremo:

$$\omega(t)=\omega_0+a_T t$$

$$\theta(t)=\theta_0+\omega t+\frac{1}{2}a_T t^2$$

Avremo quindi una nuova espressione per l'accelerazione centripeta $a_N=(\omega_0+a_T t)^2 R$
La similarità strutturale delle equazioni del moto circolare con quelle del moto rettilineo è dovuta al fatto che in questo caso, come nel primo, il moto è descritto in funzione esclusivamente del tempo (dicasi unidimensionale). Con la differenza che, mentre nel primo caso questa metodologia descrittiva risulta rigorosamente completa, nel caso del moto circolare abbiamo trascurato il problema bidimensionale (direzione di moto vettoriale), che abbiamo tuttavia affrontato nella descrizione dei moti piani in generale. Ad ogni modo queste equazioni risultano piuttosto soddisfacenti nel predire determinate proprietà del moto circolare, la loro versatilità e semplicità risulta molto ideale. E' importante, per una corretta descrizione delle forze in gioco in un moto circolare,ricordarsi di sommare l'accelerazione centripeta con l'accelerazione tangenziale.

Andremo ora ad introdurre i concetti del moto circolare in maniera più rigorosa, servendoci dei vettori. E' importante che sia chiaro il concetto di *prodotto vettoriale*. Si osservi la figura:



Definiamo velocità angolare $\vec{\omega}$ il vettore perpendicolare al piano di rotazione, di modulo $\frac{d\theta}{dt}$ e verso tale che dall'estremità del vettore il moto risulti antiorario. La direzione di $\vec{\omega}$ individua così l'asse di rotazione (retta ortogonale al piano passante per il centro della circonferenza), e il vettore $\vec{\omega}$ può spostarsi lungo questo asse lasciando invariate le sue proprietà. La velocità tangenziale sarà quindi data dal *prodotto vettoriale* tra il vettore raggio e il vettore velocità angolare:

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

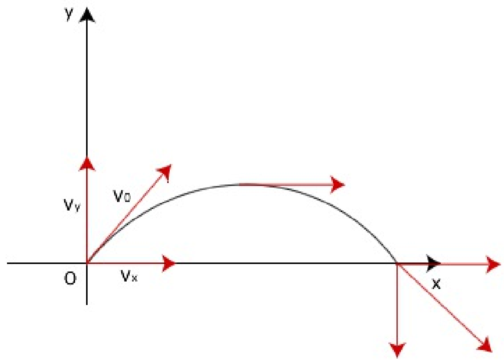
Notiamo che **v** sarà un vettore perpendicolare alla velocità angolare e al raggio vettore.
Dando $\vec{\omega}$ possiamo quindi determinare l'asse e il verso di rotazione, oltre che un informazione sulla variazione dell'angolo in funzione del tempo. La derivazione rispetto al tempo di $\vec{\omega}$ ci darà *l'accelerazione angolare* di modulo $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$, il cui prodotto vettoriale con il raggio vettore $\vec{r}$ andrà a definire l'*accelerazione tangenziale*. L'accelerazione nel moto circolare è quindi la somma delle componenti *accelerazione centripeta* e *accelerazione tangenziale*, come risulta da:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

Dove $\vec{\alpha}\times\vec{r}$ rappresenta, come sappiamo, l'accelerazione tangenziale, mentre $\vec{\omega}\times\vec{v}$ sarà l'accelerazione centripeta. Avremo che nel moto circolare uniforme la prima è nulla. Discutiamo ora una proprietà molto interessante del moto circolare. Come detto sopra, la velocità angolare si può applicare in qualsiasi punto della retta ortogonale passante per il centro della circonferenza, detto asse di rotazione. Spostando quindi il punto di applicazione di $\vec{\omega}$ lungo questo asse, avremo che il raggio vettore di modulo costante descriverà un moto rotatorio attorno all'asse formando con $\vec{\omega}$ un angolo costante Φ , la sua derivata $\frac{d\vec{r}}{dt}$ potremo scriverla $\vec{\omega}\times\vec{r}$. Anche il vettore della velocità tangenziale forma un angolo costante con l'asse di rotazione, pertanto la sua derivata $\frac{d\vec{v}}{dt}$ potremo scriverla, come visto sopra $\vec{\omega}\times\vec{v}$. Queste caratteristiche sono comuni a un tipo di moto chiamato *moto di precessione*. In astronomia è un concetto ben conosciuto, ed è stato utilizzato ampiamente per descrivere il moto degli astri utilizzando come punto di riferimento l'asse terrestre o qualsivoglia altro asse. In particolare abbiamo notato che, essendo **A** un vettore che descrive un moto di precessione con velocità angolare $\vec{\omega}$, la sua derivata temporale sarà sempre:

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{A}$$

Essendo **A** un vettore di modulo costante, la sua derivata dovrà essere un vettore ortogonale al primo. Tutto ciò risulta vero anche quando si cambia asse di riferimento.
Terminato lo studio del moto circolare, procederemo ora ad indagare le leggi che governano le dinamiche dei corpi in caduta lanciati da una posizione non verticale. Questo tipo di moto è definito ***moto parabolico***. Per la descrizione delle sue caratteristiche ricorreremo senza superflue complicazioni all'uso delle coordinate cartesiane. Avevamo già discusso in precedenza le proprietà del moto verticale di caduta del punto materiale, individuando, sulla superficie terrestre, l'accelerazione gravitazionale come proprietà dal moto. Cosa sarebbe successo se il punto avesse avuto a disposizione una velocità con componente orizzontale? Analizziamo il problema, ponendo l'origine O degli assi cartesiani come il punto di partenza del moto, quindi $r_0=0$ $x_0=0, y_0=0$. Il vettore velocità ,come mostrato in figura, forma con l'asse delle ascisse un angolo θ , per cui a descrivere il moto saranno le due proiezioni x(t) e y(t).



Dal momento che stiamo descrivendo la situazione come fosse sulla superficie terrestre, poniamo che nella componente y(t) agisca l'accelerazione di gravità, tale che le due funzioni siano provviste delle rispettive componenti della velocità:

$$v_x = v_0 \cos(\theta) \quad \text{con} \quad v_y = v_0 \sin(\theta) - g\,t$$

$$\vec{v} = v_x \eta_x + v_y \eta_y \quad \text{e quindi, integrando:}$$

$$r(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt = \int_{t_0}^{t} (v_x \eta_x + v_y \eta_y)\,dt = \eta_x \int_{t_0}^{t} v_0 \cos(\theta)\,dt + \eta_y [\int_{t_0}^{t} v_0 \sin(\theta)\,dt - g \int_{t_0}^{t} t\,dt]$$

$= [v_0 \cos(\theta)\,t]\eta_x + [v_0 \sin(\theta)\,t - \frac{1}{2} g\,t^2]\eta_y$ Abbiamo quindi ottenuto le proiezioni di due moti differenti:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)\,t$$

$$y(t) = v_0 \sin(\theta)\,t - \frac{1}{2} g\,t^2$$

Rispettivamente abbiamo un moto rettilineo uniforme proiettato sull'asse delle ascisse e un moto uniformemente accelerato sull'asse delle ordinate. La composizione di questi due moti ha come risultante la traiettoria di una parabola, come andremo a dimostrare ora, ricavando la relazione temporale tra le due funzioni:

$$x = v_0 \cos(\theta)\,t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)}$$

Da cui, ponendo y in funzione di x:

$$y(x) = v_0 \sin(\theta)\left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)}\right)^2$$

$$y(x) = \tan(\theta)\,x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2$$

Che è l'equazione di una parabola con concavità rivolta verso il basso della forma: $y = -ax^2 + bx + c$ con $c = 0$. Il nostro punto materiale, lanciato dall'origine O con velocità tale che la sua inclinazione sia proiettata sugli assi ottenendone le rispettive componenti, descriverà con la sua traiettoria una parabola, raggiungendo una determinata altezza massima, da cui poi, avendo esaurito la sua velocità verticale per effetto della gravità in vista della relazione $0 = v_0 \sin(\theta) - g\,t$, ricadrà verso il basso in un punto G detto “punto di gittata” . Dalle caratteristiche matematiche della parabola, deduciamo che il punto di altezza massimo coinciderà con il vertice della curva, che sappiamo essere dato in coordinate da:

$$V_{parabola}(\frac{-b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a})$$

Andando a sostituire le rispettive relazioni:

$$h_{max}(\frac{-\tan(\theta)2v_0^2\cos^2(\theta)}{-2g});(\frac{-\tan^2(\theta)2v_0^2\sin^2(\theta)}{-4g})$$

Da cui, con le dovute semplificazioni otterremo le coordinate del punto materiale nel suo punto di massima altezza:

$$h_{max}(\frac{v_0^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g});(\frac{v_0^2\sin^2(\theta)}{2g})$$

Da queste coordinate deduciamo che il punto raggiunge la sua massima altezza per $\frac{v_y^2}{2g}$, a metà dal suo percorso orizzontale, perché infatti se andiamo ad indagare il punto di gittata (e cioè il punto in cui la curva della parabola interseca di nuovo l'asse x), otterremo che $x_{Gittata}=2x_{hmax}$. Dal momento che stiamo cercando l'intersecazione con l'asse x, poniamo l'equazione della parabola uguale a zero. Una delle soluzioni sarà ovviamente $x=0$ (dal momento che il punto è partito dall'origine), l'altra soluzione sarà:

$$x(\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta)}x-\tan(\theta))=0$$

$$g\,x=\tan(\theta)2v_0^2\cos^2(\theta)$$

$$x_G=\frac{2v_0^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g}$$

Detta "gittata" del punto. Si noti come la gittata sia per l'appunto il doppio percorso della coordinata x nel punto di massima altezza. Tutto ciò è dovuto alla simmetria della parabola e al fatto che il moto sia *uniformemente* accelerato lungo l'asse y, con uguali tempi di decelerazione e accelerazione. Si noti come la gittata sia inversamente proporzionale all'accelerazione gravitazionale. Se il punto è lanciato dalla superficie di un altro pianeta, la sua gittata sarà più lunga se la gravità risulta minore, e viceversa. Stesso discorso dicasi per l'altezza massima raggiunta. Il tempo di volo corrisponde a $t_g=\frac{x_G}{v_0\cos(\theta)}$. Si noti come il tempo di volo impiegato da un punto materiale lanciato da un altezza y_0 sia lo stesso di un punto lanciato dalla stessa altezza con una velocità iniziale. Nel secondo caso avremo però che il punto percorrerà una determinata distanza orizzontale. Nel punto di gittata avremo che le velocità del punto saranno simmetriche rispetto all'asse x:

$$v_x=v_0\cos(\theta),\ v_y=-v_0\sin(\theta),\ \tan(\Phi)=-\tan(\theta)$$

La gittata dipende certamente dall'angolo di lancio, come ci suggeriscono le relazioni seno e coseno nella formula. La massima gittata sarà ottenuta ovviamente per $\theta=45°$. Tratteremo ora il caso di due punti materiali , provvisti di velocità iniziale con inclinazione θ,Φ , dei quali uno parte da un altezza y_0 $x_0=0$, mentre l'altro da un punto x_0 e $y_0=0$. Andremo a trovare l'istante di tempo t in cui i due punti materiali collideranno in volo, e di conseguenza la posizione.

Sia $R_1(t)=(x(t);y(t))$ la traiettoria del primo punto materiale, con proiezioni:

$x_1(t)=v_0\cos(\theta)t$ e $y_1(t)=y_0+v_0\sin(\theta)t-\frac{1}{2}gt^2$

Mentre $R_2(t)=(x(t);y(t))$ avrà proiezioni:

$x_2(t)=x_0+v_0\cos(\Phi)t$ e $y_2(t)=v_0\sin(\Phi)t-\frac{1}{2}gt^2$ al fine di ricavare l'istante t in cui le due traiettorie collideranno ,porremo $R_1(t)=R_2(t)$ e quindi:

$$x_1(t)=x_2(t) \quad \text{e} \quad y_1(t)=y_2(t)$$

Da cui:

$$v_0\cos(\theta)t=x_0+v_0\cos(\Phi)t$$

$$y_0+v_0\sin(\theta)t-\cancel{\frac{1}{2}gt^2}=v_0\sin(\Phi)t\cancel{-\frac{1}{2}gt^2}$$

Da qui sfrutteremo la proprietà matematica secondo cui se $A=B;C=D\neq 0\rightarrow\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$
Ri-arrangiamo le equazioni per avere:

$$v_0\sin(\theta)t=v_0\sin(\Phi)t-y_0$$

$$v_0\cos(\theta)t=x_0+v_0\cos(\Phi)t$$

Da cui:

$$\tan(\theta)=\frac{v_0\sin(\Phi)t-y_0}{x_0+v_0\cos(\Phi)t}$$

Dalla quale, risolvendo in rispetto della variabile t, otteniamo:

$$\tan(\theta)v_0\cos(\Phi)t-v_0\sin(\Phi)t=-x_0\tan(\theta)-y_0$$

$$t(\tan(\theta)v_0\cos(\Phi)-v_0\sin(\Phi))=-x_0\tan(\theta)-y_0$$

$$t=\frac{-x_0\tan(\theta)-y_0}{\tan(\theta)v_0\cos(\Phi)-v_0\sin(\Phi)}$$

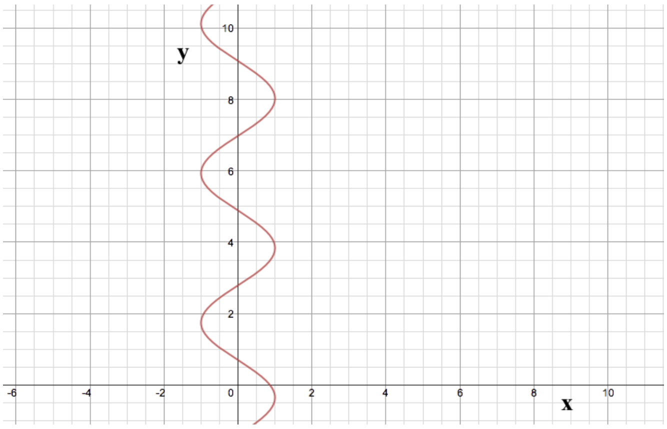
Da qui basterà poi sostituire la relazione nella variabile t in qualsiasi delle equazioni del moto per ottenere la posizione in cui avviene la collisione.
Abbiamo quindi concluso la trattazione del moto parabolico. Questo tipo di moto trova applicazioni pure nella meccanica celestiale, nella cosiddetta “fionda planetaria”, ampiamente utilizzata in ingegneria spaziale. Si noti che il moto dei satelliti corrisponde a un moto parabolico con velocità talmente elevata (velocità di fuga), da non ricadere di nuovo sulla superficie terrestre.

Per concludere, procederemo con la trattazione della **composizione di moti**. Abbiamo già affrontato qualcosa di simile nel caso delle proiezioni di moti armonici nel caso del moto circolare o nel caso più recente del moto parabolico composto da un moto rettilineo sull'asse delle ascisse e un moto

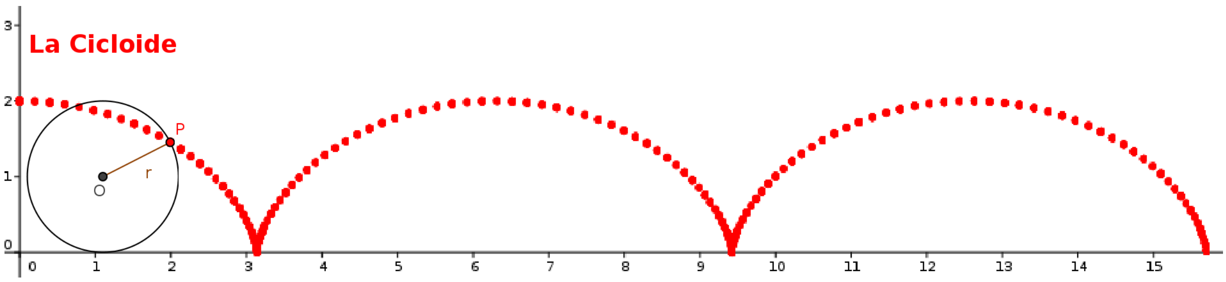
accelerato sull'asse delle ordinate. Analizzeremo brevemente vari casi, ricordandoci le proprietà di velocità e accelerazione (rispettivamente la velocità determina la direzione del moto e ha modulo $\frac{ds}{dt}$, l'accelerazione ci da informazioni sulla forza agente, in generale non è parallela alla velocità, tendendo a curvarne la traiettoria).
Iniziamo con la descrizione di un moto che sia di tipo armonico semplice, oscillante sull'asse delle x, tale che $x(t)=A\sin(\omega t+\Phi)$, mentre presenta, sull'asse delle ordinate, un moto rettilineo uniforme della forma $y(t)=vt$. Assumendo x in funzione di y e definendo la relazione temporale tra i due moti, avremo per $t=\frac{y}{v}$, per cui:

$$x(y)=A\sin(\omega\frac{y}{v}+\Phi)$$

Questo tipo di moto descrive una *sinusoide*; avremo che essendo x in funzione di y, il grafico sarà:



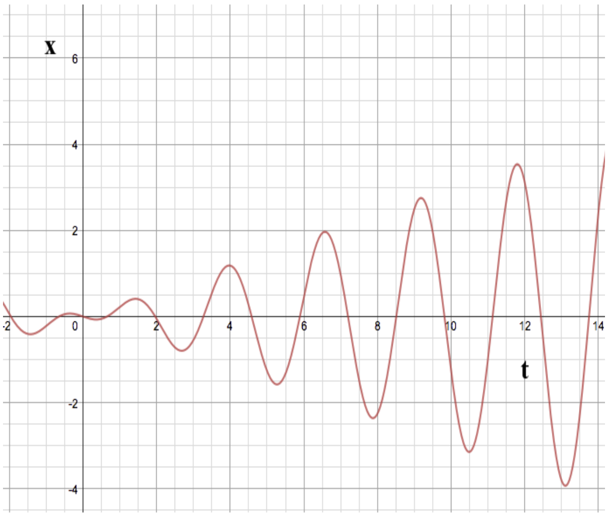
Consideriamo ora il caso di un moto composto da un moto armonico semplice sommato a un moto rettilineo con velocità $v=\omega R$ sull'asse delle ascisse $x(t)=R\cos(\omega t)+\omega Rt$, e un moto armonico sull'asse delle y $y(t)=R\sin(\omega t)+R$ con centro in $y=R$ (invece che in $y=0$).
La composizione di questi due moti ci darà il grafico di una *cicloide*.

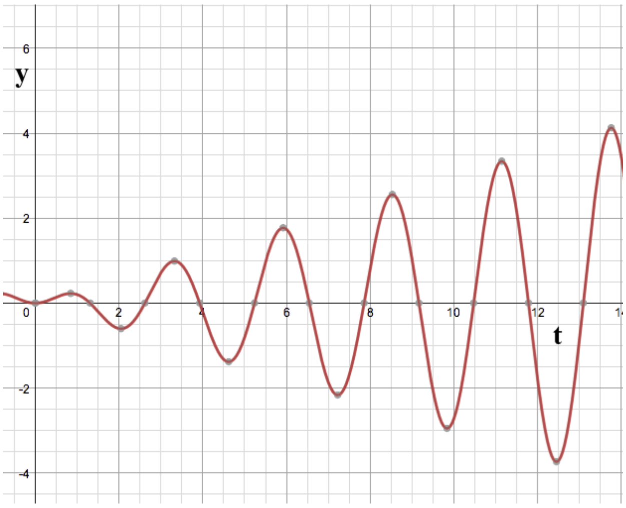


Possiamo immaginare un punto all'estremo di una ruota che rotola senza slittare sull'asse delle x, e così facendo descrive una traiettoria detta cicloide. Si può anche immaginare il moto come una traslazione del centro di simmetria della circonferenza combinato con quello di un punto periferico.
Proseguiamo prendendo in considerazione le coordinate polari, e assumendo $r=vt$ e $\theta=\omega t$, secondo la relazione con le coordinate cartesiane avremo: $x=r\cos(\theta)$ e $y=r\sin(\theta)$ e quindi:

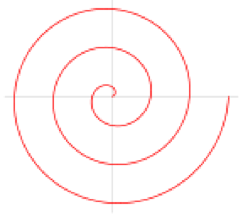
$$x=vt\cos\omega t \quad \text{e} \quad y=vt\sin\omega t$$

Che non rappresentano due moti armonici semplici, in quanto l'ampiezza è anch'essa funzione del tempo. I rispettivi grafici in funzione del tempo saranno:





La composizione di questi due moti corrisponde alla *spirale di Archimede*, di equazione $r = v\frac{\theta}{\omega}$



Infine, tratteremo il caso di un moto tridimensionale (assi x, y, z), nel quale avremo due moti armonici semplici liberi di oscillare negli assi x e y: $x(t) = R\cos(\omega t)$ e $y(t) = R\sin(\omega t)$, e un moto rettilineo uniforme nell'asse z $z = v_z t$. La direzione del moto è determinata dalla componente z, le accelerazioni corrispondono ai moti armonici (a_x, a_y) e valgono $\omega^2 R$.
Derivando rispetto al tempo, otterremo informazioni sulle loro velocità:

$$v_x = -\omega R\sin(\omega t) \quad , \quad v_y = \omega R\cos(\omega t) \quad , \quad v_z(costante)$$

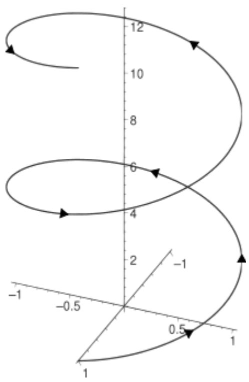
Da ciò il modulo della velocità del moto è dato da:

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\omega^2 R^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + v_z^2}$$

Dalla relazione trigonometrica: $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$$|v| = \sqrt{\omega^2 R^2 + v_z^2}$$

Il grafico del moto è il seguente:



Il moto è detto *elicoide*, e con questo si conclude il nostro trattato. E' importante tenere conto della scelta del corretto sistema di riferimento nella descrizione di qualsivoglia problema fisico. Abbiamo visto come talvolta la descrizione di un moto risulti molto più semplice con determinati sistemi che con altri, in funzione delle sue caratteristiche e simmetria. Come sistema di coordinate predefinito è consigliabile l'utilizzo degli assi cartesiani, per poi svariare in base al problema che si ha di fronte, passando alle coordinate polari, come nel caso del moto circolare. I formalismi matematici non aiutano nella risoluzione del problema, e la cosa più importante in questo processo è cercare di non perderne di vista il significato fisico. E' molto importante immaginarsi le traiettorie dei punti materiali come conseguenza di qualche determinato fenomeno fisico che agisce su di essi, come nel caso della forza di gravità e tanti altri. La cinematica ci ha permesso di prevedere i moti dei pianeti, la matematica ci ha concesso gli strumenti indispensabili per una corretta e rigorosa descrizione, ora tocca a noi, investigatori della realtà, indagare ciò che ancora non riusciamo a risolvere, che sia un esercizio o un problema reale, una nuova teoria o una nuova esperienza. Con l'ausilio della scienza siamo passati dalla ruota ai viaggi sulla luna, e tutto ciò non può che progredire ancora, ora più che mai

Matteo Parriciatu