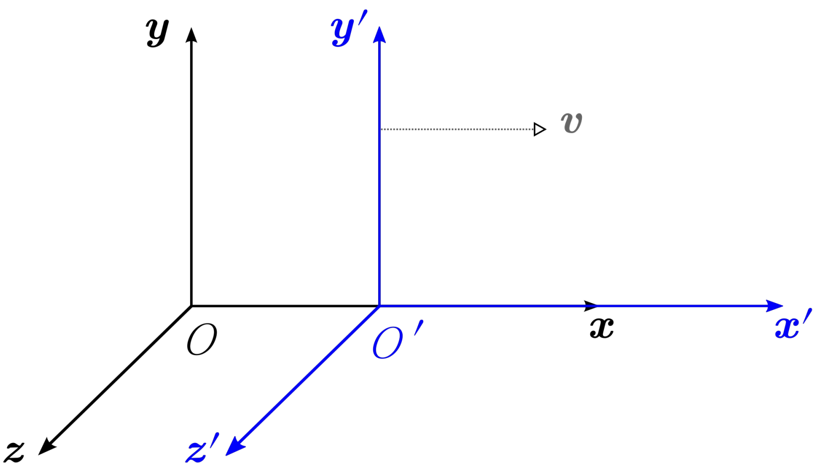
Cenni di relatività ristretta e urti tra particelle

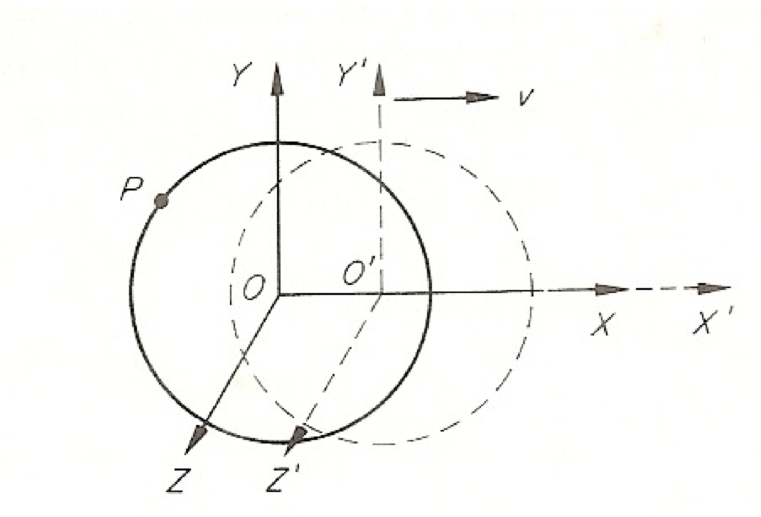
Tralasciando gli aspetti storici, procederemo con la trattazione di una delle teorie genitrici della fisica moderna: la relatività, per ora solo ristretta. Estenderemo l'argomento sino allo studio degli urti relativistici tra particelle e le relative analogie con la meccanica classica. Ritengo tuttavia doveroso fornire un analisi concettuale, prima di immergerci nelle matematiche. Guardiamoci attorno: tutto ciò che ci circonda si può dire abbia luogo, con buona approssimazione per velocità relativamente ridotte e distanze relativamente brevi, in un sistema di riferimento inerziale, quello della terra. Un sistema di riferimento può essere qualsiasi mezzo entro il quale è collocato un eventuale osservatore dotato di strumenti appositi e una vista acuta che analizza il mondo intorno a se. Che i sistemi siano un automobile, un aereo, un treno, una bicicletta non importa: per definirsi inerziali, dovranno muoversi con velocità costante. Muoversi con velocità costante implica l'annullamento di ogni effetto dovuto ad accelerazioni, (si noti che questa situazione risulta piuttosto rara, basti immaginare le noie di un viaggio in auto o in pullman, dove si è costretti a continui “rinculi” avanti o indietro, a causa di decelerazioni e accelerazioni). Infatti, se studiassimo il moto armonico di una massa agganciata a una molla in un sistema non inerziale come quello di un automobile in accelerazione, ci accorgeremmo che le nostre previsioni teoriche non coincidono con i risultati sperimentali. Accadrà infatti che la molla si allungherà o contrarrà più del dovuto relativamente alla decelerazione od accelerazione dell'automobile. Dovremo quindi modificare i nostri calcoli e tenere conto dell'accelerazione del nostro sistema di riferimento, il che complicherebbe le cose. In poche parole, definiamo sistema di riferimento inerziale quel tipo di sistema entro il quale un osservatore non saprebbe affermare di trovarsi in moto o in quiete. Arriviamo perciò alla conclusione: “*In un sistema di riferimento inerziale valgono tutte le leggi della fisica con la medesima struttura*”. Ora, nemmeno il sistema di riferimento terrestre può considerarsi inerziale, se estendiamo lo studio a velocità maggiori o a distanze ben più vaste delle nostre comuni esperienze, ci accorgiamo che a causa del moto rototraslatorio del nostro pianeta, i corpi in esso risentono l'azione di forze inerziali quali la forza di Coriolis e la forza centrifuga; esse assumono un effetto apprezzabile solo per distanze molto più estese, ecco il perché dell'assunzione iniziale, secondo la quale potremmo *approssimare* il sistema terrestre a un sistema inerziale. Il sistema di riferimento più accostabile a un sistema inerziale lo abbiamo individuato nel sole, immaginando quest'ultimo come origine e i tre assi proiettati su tre stelle distinte. Procediamo quindi con la trattazione immaginando in tutta tranquillità, nel perfetto stile di Albert Einstein, un esperimento mentale: un raggio di luce che si irradia in tutte le direzioni. Disporremo di due sistemi di riferimento, entrambi inerziali, di cui uno di essi, che chiameremo S', si muove con velocità traslatrice v_0 lungo la direzione x rispetto al sistema fermo S. Il fatto che S' disponga di una velocità rispetto a S non mette a rischio la validità del sistema di riferimento inerziale, dato che è come se S' vedesse muoversi S con una velocità $-v_0$ rispetto ad esso, sempre in virtù del fatto che in un sistema inerziale è praticamente impossibile affermare di essere in moto o in quiete.



Applichiamo la trasformazione delle coordinate tra un sistema e l'altro. Possiamo affrontare il problema da un punto di vista geometrico. La distanza $\overline{O'X'}$ può dirsi come la distanza proiettata sul sistema di riferimento fermo *S*, a cui corrisponde la distanza $\overline{OX'}$, meno la distanza, funzione del tempo,(in quanto i due sistemi sono in moto uno rispetto all'altro), che separa i due sistemi, $\overline{OO'}$. La distanza tra i due sistemi è funzione del tempo dal momento che in ogni istante *S'* percorre una distanza data dalla legge $\overline{OO'}=v_0 t$, per cui avremo le relazioni:

$$\begin{aligned} x' &= x - v_0 t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \quad \text{da cui, con rapide trasformazioni} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x' + v_0 t \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}$$

Dove abbiamo assunto il fatto che all'inizio della misurazione $t=0$ i sistemi *S* ed *S'* coincidono nel punto di origine. Le altre coordinate, in quanto parallele, restano invariate. Si noti che il tempo di misurazione risulta lo stesso per entrambi i sistemi, indipendentemente dalle trasformazioni. E' questo il concetto di *tempo assoluto* che risuonava al tempo della formulazione della relatività galileiana. Si può passare da un sistema di coordinate all'altro operando facili trasformazioni delle equazioni oppure considerando che il sistema *S* si muove rispetto a *S'* con velocità $-v_0$, per poi scambiare i simboli. Avendo effettuato le trasformazioni galileiane, procederemo con il nostro esperimento mentale del raggio di luce. Einstein arrivò alla conclusione che la velocità della luce fosse la stessa in ogni sistema di riferimento, indipendentemente dal moto di questi e in ogni direzione, è questo il *principio di costanza della velocità* della luce nel *vuoto,* giustificato dal famoso esperimento di Michelson e Morley e dalle previsioni teoriche di Maxwell. Immaginiamo perciò una sfera di luce, con centro nell'origine del sistema di riferimento in quiete *S* e di raggio *r*, descritta dall'equazione $x^2+y^2+z^2=r^2$, dove r, raggio della sfera, rappresenta la distanza percorsa dalla luce in un intervallo di tempo *t (* e quindi $r=ct$); perciò l'equazione della sfera diventa $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$. Assumiamo che l'irradiamento venga osservato dal sistema di riferimento *S'* in moto rispetto a *S* e che il fenomeno abbia inizio per entrambi all'istante $t=t'=0$. L'equazione sarà $x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$.



In virtù del principio di equivalenza delle leggi fisiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali, poniamo $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$ in cui effettuiamo le trasformazioni galileiane in rispetto a ciò che vede l'osservatore in movimento in *S'*:

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 \equiv (x-v_0 t)^2+y^2+z^2-c^2t^2$$

Sviluppando i calcoli avremo perciò:

$$x^2-2v_0 x t+v_0^2 t^2+y^2+z^2-c^2 t^2 \neq x^2+y^2+z^2-c^2 t^2$$

Si nota però che le equazioni non sono uguali, esse differiscono di due termini $-2v_0 x t+v_0^2 t^2$: la trasformazione galileiana non ha funzionato.
Tempo addietro, nel 1800, si ebbe un problema analogo quando si tentò di estendere i principi della relatività classica galileiana all'elettromagnetismo, il che portò Lorentz all'adattamento della relatività galileiana per i fenomeni elettromagnetici, introducendo le *trasformazioni di Lorentz*.
Infatti, il motivo per cui le equazioni non coincidono è semplicemente perché abbiamo trattato il termine *c*, rappresentante la velocità della luce, come costante, e cioè invariante rispetto alla velocità di chi lo osserva. In ogni altro caso, le trasformazioni galileiane avrebbero funzionato.
Dovremo quindi ammettere l'esistenza di alcuni coefficienti, da applicare alle trasformazioni galileiane, per i quali avremo equivalenza tra i due sistemi di riferimento. Siano perciò:

$$\begin{gathered} x'=a_1 x+a_2 t \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=b_1 x+b_2 t \end{gathered}$$

I coefficienti a_1, a_2, b_1, b_2 sono stati assegnati in funzione del bisogno di operare sui due termini che rendono le due equazioni ineguali. Prima di sviluppare il calcolo, si noti che l'origine del sistema di riferimento in movimento, il punto $x'=0$, si muove con velocità v_0 (quella del sistema) relativamente al sistema in quiete *S*. Quindi visto dal sistema *S*, la posizione di questo punto all'istante *t*, è semplicemente $x=v_0 t$. Perciò possiamo riscrivere l'equazione:

$$x'=0=a_1 x+a_2 t \ \rightarrow \ x=-\frac{a_2 t}{a_1}=v_0 t \quad \text{da cui, semplificando} \quad \frac{a_2}{a_1}=-v_0$$

A questo punto otteniamo una nuova versione della nostra trasformazione:

$$x'=a_1 x+a_2 t=a_1\left(x+\frac{a_2}{a_1}t\right)=a_1(x-v_0 t) \quad \text{che andremo a sostituire in:}$$

$$(a_1(x-v_0 t))^2+y^2+z^2-c^2(b_1 x+b_2 t)^2=x^2+y^2+z^2-c^2 t^2$$

Svolgendo i calcoli risulterà:

$$a_1^2 x^2+a_1^2 v_0^2 t^2-2a_1^2 v_0 x t+y^2+z^2-c^2 b_1^2 x^2-c^2 b_2^2 t^2-2c^2 b_1 x b_2 t=x^2+y^2+z^2-c^2 t^2$$

Con le dovute semplificazioni rimane
$a_1^2 x^2+a_1^2 v_0^2 t^2-2a_1^2 v_0 x t-c^2 b_1^2 x^2-c^2 b_2^2 t^2-2c^2 b_1 b_2 x t=x^2-c^2 t^2$ raccogliendo ed eguagliando i rispettivi coefficienti, (i valori per cui le coordinate trasformate saranno eguali alle altre) avremo:

$$(a_1^2-c^2 b_1^2)x^2=x^2 \quad \rightarrow \quad a_1^2-c^2 b_1^2=1 \quad (\text{å})$$

$$(a_1^2 v_0^2-c^2 b_2^2)t^2=-c^2 t^2 \quad \rightarrow \quad c^2 b_2^2-a_1^2 v_0^2=c^2 \quad (\text{ß})$$

$$-2(a_1^2 v_0+b_1 b_2 c^2)x t=0 \quad \rightarrow \quad b_1 b_2 c^2=-a_1^2 v_0 \quad (\partial)$$

Dalle equazioni (å) e (ß) possiamo scrivere:

$$b_1^2 c^2 = a_1^2 - 1 \quad (å.1)$$

$$b_2^2 c^2 = c^2 + a_1^2 v_0^2 \quad (ß.1)$$

Notiamo qui che se eleviamo al quadrato l'equazione (∂) e moltiplichiamo (å.1) per (ß.1), otteniamo lo stesso coefficiente $b_1^2 b_2^2 c^4$, per cui, dopo aver completato queste operazioni, possiamo eguagliare i membri:

$$b_1^2 b_2^2 c^4 = (a_1^2 - 1)(c^2 + a_1^2 v_0^2) = a_1^4 v_0^2$$

$$a_1^2 c^2 + \cancel{a_1^4 v_0^2} - c^2 - a_1^2 v_0^2 = \cancel{a_1^4 v_0^2}$$

$$a_1 c^2 - a_1^2 v_0^2 = c^2 \;\rightarrow\; a_1^2 (c^2 - v_0^2) = c^2$$

Andremo quindi a trovare il valore di a_1 :

$$a_1^2 = \frac{c^2}{(c^2 - v_0^2)} \quad \text{da cui, dividendo per} \quad c^2 \rightarrow \quad a_1^2 = \frac{1}{(1 - \frac{v_0^2}{c^2})}$$

E prendendone solo la radice positiva, otterremo:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

E ricordando la relazione che legava i coefficienti $a_{1,} a_2$:

$$\frac{a_2}{a_1} = -v_0 \quad \text{ricaviamo il valore di} \quad a_2 = -v_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Usando l'equazione (å.1) otteniamo:

$$b_1^2 c^2 = \frac{1}{(1 - \frac{v_0^2}{c^2})} - 1 \quad \text{sommando avremo} \quad b_1^2 c^2 = \frac{1 - (1 - v_0^2 / c^2)}{(1 - v^2 / c^2)} \quad \text{e quindi} \quad b_1^2 c^2 = \frac{v_0^2}{c^2} \frac{1}{(1 - \frac{v_0^2}{c^2})}$$

Da cui ricaviamo il valore di $b_1^2 = \frac{v_0^2}{c^4} \frac{1}{(1 - \frac{v_0^2}{c^2})}$ in cui, essendo v_0 negativa rispetto al sistema di riferimento in movimento (ricordiamo che per un osservatore in S', è come se il sistema in quiete S

si stesse muovendo con velocità opposta alla sua mentre egli sta fermo). Prenderemo la radice negativa del valore di b_1, che risulta perciò essere:

$$b_1 = -\frac{v_0}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Dall'equazione (ß.1) possiamo scrivere:

$$b_2^2 c^2 = c^2 + \frac{1}{(1-\frac{v_0^2}{c^2})} v_0^2 = \frac{c^2(1-v_0^2/c^2)+v_0^2}{(1-v_0^2/c^2)} = \frac{c^2-v_0^2+v_0^2}{(1-v_0^2/c^2)} = \frac{c^2}{(1-v_0^2/c^2)}$$

Da cui ricaviamo, dividendo per c^2, il valore di b_2, prendendo la radice quadrata positiva:

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Ed avrà perciò lo stesso valore di a_1. Torniamo perciò alle nostre trasformazioni:

$$x' = a_1 x + a_2 t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = b_1 x + b_2 t$$

Che potremo quindi riscrivere:

$$x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v_0}{c^2} x}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (1.0)$$

Le (1.0) sono note con il nome di *trasformazioni di Lorentz*, a cui ho già accennato. Non deve intimorire il processo che ci ha portato alla loro derivazione,in quanto, seppur possa sembrare alquanto artificioso, non è altro che una diretta conseguenza del principio di costanza della velocità della luce. In particolare, una loro caratteristica peculiare risulta essere il termine sotto radice, denominato *fattore di Lorentz*, che chiamiamo:

$$\Upsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Questi è scritto in tale maniera, anch'essa piuttosto artificiosa, perché vuole esprimere il rapporto tra la velocità con cui si osserva il fenomeno (o relativamente la velocità con cui si muove un sistema rispetto a noi) e la velocità della luce. Ne deduciamo un concetto di assoluta importanza: è chiaro che il rapporto $\beta = \frac{v_0}{c}$ tenderà a zero per valori molto piccoli di v_0. Ed infatti è facile verificare che le trasformazioni di Lorentz si riducono alle normali trasformazioni galileiane per velocità assai ridotte rispetto a c. Ciò implica, dato l'enorme valore della velocità della luce, stimato con precisione essere $c = 299\,792\,458\, m/s$, che per i nostri ritmi quotidiani e per quasi tutti i fenomeni che descriviamo a livello terrestre, le trasformazioni di Lorentz risultano piuttosto superflue. Un altro aspetto di estrema importanza riguarda il limite di crescita di v_0.

Verifichiamo intuitivamente che per $\beta \rightarrow 1$ e cioè $\frac{v_0^2}{c^2} \rightarrow 1$ e quindi per il valore di v_0 che si avvicina a quello della velocità della luce, avremo che il denominatore del fattore di Lorentz tende a 0, il che è un operazione impossibile, e si avrà un asintoto della funzione per $v_0 = c$ tale che $\lim_{v_0 \rightarrow c} \Upsilon_0(v_0) = \infty$ e non solo: ammettendo che v_0 possa superare il valore di c, violeremmo la condizione di realtà della radice, in quanto ci ritroveremmo una radice negativa, e quindi immaginaria, non reale.

Avremo quindi che la velocità della luce nel vuoto non solo è costante in tutte le direzioni e in tutti i sistemi di riferimento, ma anche che nessun corpo dotato di massa (in seguito vedremo perché) può raggiungere questa velocità, così come niente può muoversi più velocemente della luce, qualsiasi cosa sia. La fisica moderna ha un po' modificato quest'ultima conclusione: *niente che trasporti informazione può muoversi più velocemente della luce*. Giustificare questa modifica esula dagli scopi di questo trattato, tuttavia, la sua formulazione deriva dalla recente meccanica quantistica e dalla fisica delle particelle.

Ora ci potremo giustamente chiedere: ammettiamo che un astronave futuristica possa viaggiare alla velocità della luce (cosa chiaramente impossibile, ma parliamo di un paradosso), se questa accendesse i fari,la velocità della luce sarebbe eguale alla velocità della luce più la velocità dell'astronave? Vale a dire $v_c = 2c$? Questa almeno, è l'assunzione che se ne potrebbe trarre ragionando sulle trasformazioni della fisica classica. Derivando infatti le trasformazioni galileiane avremo:

$$\begin{gathered} \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d}{dt} v_0 t \\ \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} \\ t' = t \end{gathered} \qquad \text{e perciò otteniamo:} \qquad \begin{gathered} v_x' = v_x - v_0 \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \\ t' = t \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + \frac{d}{dt} v_0 t \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} \\ t = t' \end{gathered} \qquad \text{da cui:} \qquad \begin{gathered} v_x = v_x' + v_0 \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \\ t = t' \end{gathered}$$

Che sono le trasformazioni galileiane della velocità, secondo le quali la luce dei fari dell'astronave che viaggia alla velocità della luce si dovrebbe propagare quindi con una velocità doppia. Tutto ciò viola il principio di costanza della velocità della luce, perciò per argomenti riguardanti velocità eccezionalmente elevate, le trasformazioni della meccanica classica perdono di attendibilità. Secondo la teoria della relatività ristretta niente può muoversi a una velocità maggiore della velocità della luce,nemmeno la luce stessa. La particolarità di questa affermazione risiede nel fatto che è un'assunzione dettata dalle esperienze degli esperimenti passati, e finora la sua veridicità non è mai stata messa in discussione, rivelandosi come una delle assunzioni più azzeccate della storia del pensiero umano. La composizione della velocità, nel caso del paradosso dell'astronave, è da effettuarsi per mezzo delle trasformazioni di Lorentz (1.0), che per comodità riscriviamo:

$$x'=\Upsilon_0(x-v_0 t), \quad y'=y, \quad z'=z, \quad t'=\Upsilon_0(t-\frac{v_0}{c^2}x)$$

e che possiamo adattare al sistema di riferimento in quiete *S*:

$$x=\Upsilon_0(x'+v_0 t'), \quad ,y=y', \quad z=z', \quad t=\Upsilon_0(t'+\frac{v_0}{c^2}x')$$

Al fine di ottenere le trasformazioni di Lorentz per la velocità, deriviamo le (1.0) esprimendo il rapporto dei differenziali:

$$\begin{aligned}
&dx'=\Upsilon_0(dx-v_0\,dt)=\Upsilon_0 dt(\frac{dx}{dt}-v_0)=\Upsilon_0 dt(v_x-v_0)\\
&dy'=dy\\
&dz'=dz\\
&dt'=\Upsilon_0(dt-\frac{v_0}{c^2}dx)=\Upsilon_0 dt(1-\frac{v_0}{c^2}\frac{dx}{dt})=\Upsilon_0 dt(1-\frac{v_0}{c^2}v_x)
\end{aligned}$$

Da cui otterremo l'espressione $\frac{d\,x'}{dt'}=v_x'$ rappresentante la trasformazione della velocità, semplicemente dividendo tra loro le due espressioni differenziali:

$$v_x'=\frac{v_x-v_0}{1-\frac{v_0}{c^2}v_x}$$

Mentre per gli altri assi avremo:

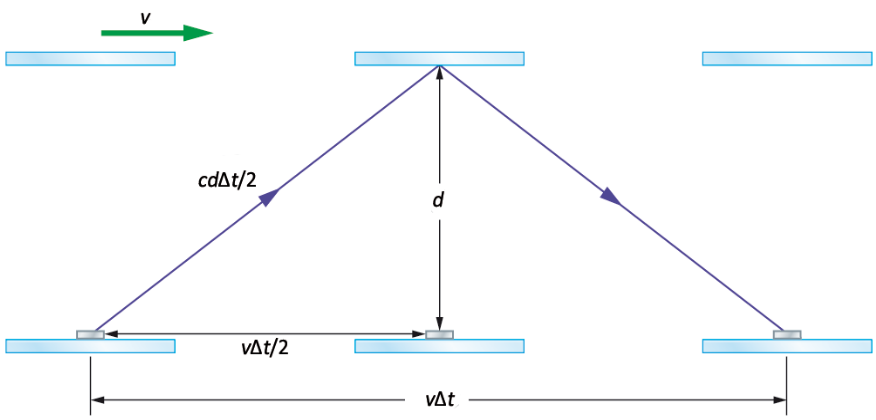
$$v_y'=\frac{v_y}{\Upsilon_0(1-\frac{v_0}{c^2}v_x)}, \quad v_z'=\frac{v_z}{\Upsilon_0(1-\frac{v_0}{c^2}v_x)}$$

Il procedimento è analogo per le trasformazioni delle coordinate del sistema in quiete *S*. Ci accorgiamo subito che per valori $v_0 \ll c$ le trasformazioni di Lorentz per la velocità si riducono a quelle galileiane. Tornando al nostro paradosso, applicando la nuova espressione per la velocità relativa della luce e considerando il sistema del faro di luce come quello in quiete, avremo:

$$v_c=\frac{c+c}{1+\frac{c^2}{c^2}}=\frac{2c}{2}=c$$

Niente può superare la velocità della luce, nemmeno la luce stessa. La luce dei fari della nostra astronave viaggerà sempre e comunque alla velocità c , indipendentemente dalla nostra velocità. E' come se il nostro universo avesse per l'appunto imposto un “limite di velocità per

l'informazione", ed è lecito chiedersi da cosa derivi questo limite, se si possa rompere in qualche modo e se sia possibile un universo con un limite di velocità diverso. Stesso discorso vale quando si parla di altre costanti della fisica, come la costante universale di Newton G, la costante di Planck h e tante altre. Alcune teorie moderne hanno accolto questo quesito, come la teoria delle stringhe e altre. L'idea generale, abbastanza speculativa, è che vi siano più universi, ognuno con le proprie costanti derivanti dalla loro diversa configurazione interna, un po come se fossero programmati. Un idea piuttosto affascinante, destinata forse a rimanere solo un idea, a meno di inaspettate scoperte nel campo della fisica sperimentale delle alte energie in laboratori come il CERN.
Tornando alla nostra astronave, assumiamo questa come sistema di riferimento in quiete rispetto a un'altra astronave, che viaggia con velocità v_0 parallelamente alla nostra. Assumiamo che l'astronave in movimento S' disponga di pareti trasparenti in modo da lasciare intravedere il suo interno. Osserviamo che ivi vi è uno speciale orologio a luce, che funziona nel modo seguente: in ogni istante un raggio di luce viene emesso da un rilevatore disposto ortogonalmente al pavimento, verso l'asse y', e percorre una distanza d. Il suddetto raggio si irradia con velocità c e viene riflesso da uno specchio posto sul soffitto dell'astronave, e viene quindi re-indirizzato al rilevatore che segnala il suo arrivo, e misura perciò il tempo di durata del fenomeno di andata e ritorno, corrispondente chiaramente a $t_{Tot}=2\tau=\frac{2d}{c}$. L'equipaggio dell'astronave misura quindi una durata normalissima del fenomeno, come se per l'appunto fosse effettuato in quiete, come ci fanno sapere per telefono in un secondo momento. Ci hanno telefonato perché sono interessati a quello che abbiamo misurato noi, e il risultato potrà sembrare singolare:



Dal momento che l'astronave S' si muove con velocità traslatrice rispetto a noi, esagerando, è come se vedessimo il raggio di luce, una volta emesso, "inseguire" lo specchio sul soffitto, che intanto si muove con velocità v_0 propria dell'astronave. Dato che per semplicità abbiamo posto l'irradiazione rivolta perpendicolarmente alla velocità dell'astronave, la distanza all'andata sarà data semplicemente dal teorema di Pitagora, ricordando che la luce, relativamente all'astronave in movimento, percorre la distanza d sempre in un tempo $c\tau$, mentre relativamente a noi percorre in un tempo t la distanza ct, avremo:

$$c^2t^2=v_0^2t^2+c^2\tau^2$$

Che possiamo ri-arrangiare:

$$t^2(c^2-v_0^2)=c^2\tau^2$$

Dividendo ambo i membri per c^2:

$$t^2(1-\frac{v_0^2}{c^2})=\tau^2$$

Da cui otteniamo:

$$t=\frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Avremo quindi che la durata del fenomeno misurata da noi è maggiore della durata misurata dall'astronave in movimento S'. Questo fatto è noto con il nome di *dilatazione temporale*.
Consideriamo ora un fenomeno che avvenga nel sistema di riferimento in moto S' di durata $\Delta t'=t_2'-t_1'$ nella coordinata x'. Lo stesso fenomeno, osservato dal sistema di riferimento in quiete *S*, avrà durata data dalle trasformazioni:

$$t_2=\Upsilon_0(t_2'+\frac{v_0}{c^2}x'), \qquad t_1=\Upsilon_0(t_1'+\frac{v_0}{c^2}x')$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\Upsilon_0(t_2'-t_1'-\frac{v_0}{c^2}x'+\frac{v_0}{c^2}x')=\Upsilon_0\Delta t'=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Abbiamo quindi ri-ottenuto il seguente risultato: *la durata di un fenomeno osservato in un sistema in movimento è maggiore della durata osservata nel sistema di riferimento in quiete*.
La dilatazione dei tempi è uno degli aspetti più caratteristici della relatività ristretta, e anche se i suoi effetti sono quantitativamente poco apprezzabili a velocità ridotte quali le nostre, il discorso non vale nel caso delle particelle subatomiche. Nei moderni acceleratori di particelle sono applicate ogni giorno le nozioni acquisite dalla relatività ristretta. Una particella in libertà ha una vita stimata τ, durante la quale è previsto percorrerà distanze pari a $v\tau$. In laboratorio, d'altro canto, si osserva che le particelle, le quali viaggiano a velocità prossime a quelle della luce, percorrono distanze significativamente più lunghe, il che significa che le particelle vivono più a lungo dal momento che viaggiano a velocità prossime a c. Nel sistema di riferimento solidale con la particella il tempo scorre più lentamente rispetto al sistema del laboratorio, in maniera tale che quando la particella decade, nel suo sistema di riferimento sarà trascorso un tempo τ, mentre nel sistema del laboratorio sarà $\Upsilon_0\tau$, e avrà percorso una distanza $v\Upsilon_0\tau>v\tau$. La dilatazione dei tempi è da interpretare tramite l'assunzione di una nuova proprietà del nostro universo: lo spaziotempo. L'unione di queste due dimensioni permette di descrivere un universo decisamente più dinamico e meno “assoluto” rispetto a quello classico. Vediamo come: avendo assunto costante la velocità della luce nel vuoto, immaginiamo di essere ancora a bordo di un astronave in movimento a velocità c; prendiamo uno specchio e osserviamone l'immagine, cosa vediamo? Un osservatore in quiete rispetto all'astronave affermerebbe che, muovendoci alla velocità della luce, questa non faccia in tempo a raggiungere il nostro viso e quindi a proiettare la nostra immagine sullo specchio. Eppure egli osserva che siamo in grado di specchiarci: dovrà forse ammettere che la velocità della luce è aumentata per fare in modo che la nostra immagine si proiettasse sullo specchio? Ciò violerebbe il principio di invarianza delle leggi fisiche in un sistema di riferimento inerziale. Noi infatti, essendo costante il nostro moto (c è pur *sempre* una velocità costante, per quanto elevata), non risentiamo di questi effetti ed è come se ci trovassimo in quiete: potremo specchiarci senza problemi. Pertanto l'osservatore all'esterno per spiegare la nostra esperienza dovrà ammettere che lo spazio e il tempo, in comunanza con la velocità dell'astronave, si siano *distorti*. La luce dovrà quindi percorrere una distanza in un tempo più breve rispetto a noi, ma più lungo rispetto a lui (come abbiamo visto nella dilatazione temporale); ciò comporta che, essendo c sempre costante, *dovrà essersi accorciata la distanza stessa*. L'osservatore all'esterno misurerà infatti una lunghezza della nostra astronave minore di quella normale, ciò giustifica l'intima essenza del concetto di spaziotempo e la sua importanza nel ruolo della costanza di c. Assumiamo come esempio una

sbarra di lunghezza *L* ' , situata sull'asse *x* ' del sistema di riferimento *S* ' in movimento rispetto a un osservatore in quiete nel sistema *S*. La sbarra, nel sistema di riferimento S ', rispetto al quale è in quiete, misurerà normalmente $L'=x'_2-x'_1$, in base al principio di invarianza delle leggi fisiche in un sistema di riferimento inerziale. Dal punto di vista dell'osservatore nel sistema *S*, le coordinate sono date da:

$$x'_2=\Upsilon_0(x_2-v_0t') \qquad x'_1=\Upsilon_0(x_1-v_0t')$$

E quindi $L'=x'_2-x'_1 = \Upsilon_0(x_2-x_1-v_0t'+v_0t')$ da cui, essendo $x_2-x_1=L$

$$L'=\Upsilon_0 L \quad \text{e cioè} \quad \frac{L'}{\Upsilon_0}=L \quad \text{pertanto} \quad L=L'\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}$$

La misura della sbarra effettuata nel sistema rispetto al quale è in movimento è minore di quella rilevata dal sistema secondo cui la sbarra è in quiete. Nel caso della nostra astronave,adesso in moto a velocità solo prossime a c , l'osservatore esterno in quiete misurerà che essa percorre una distanza $L=v_0t$, egli rileverà però una dilatazione del tempo, tale che $t=\Upsilon_0\tau$. Perciò, se per noi la distanza sarà normalmente *L* ' e sapendo tramite comunicazione che il nostro tempo è dilatato rispetto a quello dell'osservatore in *S*, misureremo $L'=v_0\tau$. Pertanto il rapporto tra le misurazioni dell'osservatore in quiete e le nostre:

$$\frac{L'}{L}=\frac{v_0t}{v_0\tau}=\frac{\Upsilon_0\tau}{\tau} \quad \text{avremo} \quad L=\frac{L'}{\Upsilon_0}=L'\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}$$

Di nuovo una contrazione. La lunghezza di un oggetto lungo la direzione del moto, *appare* essere più corta ad un osservatore che non è a riposo con l'oggetto. Il termine "appare" è di estrema importanza: *tutto è relativo*, ed è chiaro che per noi è come se l'astronave fosse ferma e l'osservatore in quiete in *S* si muovesse di velocità $-v_0$; per cui misureremo la sua stessa dilatazione dei tempi e la stessa contrazione delle lunghezze quando osserveremo i fenomeni nella sua astronave.
A partire dall'intricata connessione tra spazio e tempo, sarà opportuno rivisitare il concetto di simultaneità. Ammettiamo che due eventi accadano nelle coordinate x'_1 *e* x'_2 di un sistema di riferimento in moto *S* ' nello stesso istante di tempo *t* ', e cioè simultaneamente. Il sistema di riferimento in quiete *S* misura però:

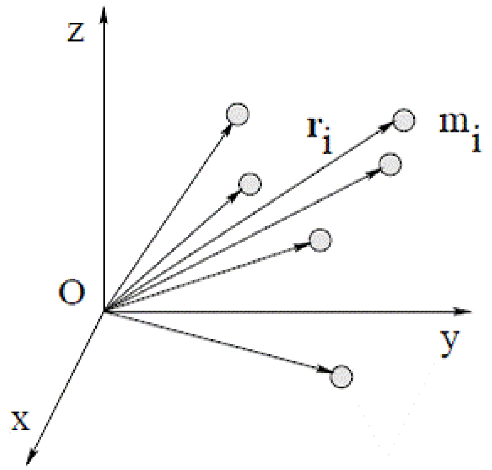
$$t_2=\Upsilon_0(t'+\frac{v_0}{c^2}x'_2) \qquad t_1=\Upsilon_0(t'+\frac{v_0}{c^2}x'_1)$$

Che sono chiaramente due istanti diversi, in quanto $x'_2\neq x'_1$, avremo perciò:

$$t_2-t_1=\Upsilon_0\frac{v_0}{c^2}(x'_2-x'_1)=\frac{\frac{v_0}{c^2}(x'_2-x'_1)}{\sqrt{1-\frac{v_0}{c^2}}}$$

Due eventi simultanei in *S* ' non risultano simultanei in *S*. Cambia totalmente la nostra concezione del mondo, chiaramente ha senso parlare di tutto ciò solo per velocità estremamente elevate. Ora, le galassie si muovono, relativamente, con velocità elevate; arriviamo alla conclusione che non ha senso parlare di un presente assoluto determinato, di un "*adesso*" preciso. *Questo esatto momento* è esatto solo per noi, dal momento che rispetto a un'altra galassia, a un asteroide che viaggia ad alta velocità, a un aereo che rompe il muro del suono, alla sonda Cassini, a una pulsar in rotazione, rispetto a tutti questi scenari, non si può parlare di simultaneità. In un certo senso ciò potrebbe farci sentire più soli. Cosa starà facendo in *questo preciso momento* un essere di un'altra civiltà nella galassia di Andromeda? Non ha senso porsi questa domanda. La relatività ci insegna anche che non ha senso in generale porsi il quesito su cosa stia facendo *in questo preciso momento* qualcuno persino dall'altra parte della nostra città o del nostro pianeta, dal momento che seppur dell'ordine di almeno 10^{-7} , i nostri eventi non sono simultanei. Oltre a farci sentire più soli, questo concetto ci fa sentire unici: siamo gli unici, nella nostra dimensione spaziale e temporale, ad avere esperienza diretta del nostro personale *istante preciso*. La domanda che dobbiamo porre non sarà pertanto "in che momento la flotta di navi spaziali è partita dalla galassia di Andromeda?", ma bensì "quando potremo ricevere un segnale da loro?".

Procediamo ora con la trattazione degli ***urti tra particelle***. In particolare trattiamo la dinamica dei sistemi di punti materiali, per poi analizzare gli urti relativistici tra particelle. Per studiare i sistemi di particelle introduciamo il concetto di centro di massa, punto geometrico nel quale si pensa concentrata tutta la massa. Immaginiamo un insieme di particelle *vincolate* al sistema:



Ogni particella è situata a distanza r_i dall'origine del sistema di riferimento, il centro di massa è individuato dal raggio vettore:

$$\vec{r_{CM}}=\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{m_1 \vec{r}_1+m_2 \vec{r}_2+..........+m_n r_n}{m_1+m_2.........+m_n}$$

E cioè la somma dei contributi di tutte le masse delle particelle per la loro distanza. Le coordinate del centro di massa sono date in base al sistema di riferimento scelto, avremo:

$$x_{CM}=\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad y_{CM}=\frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{CM}=\frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

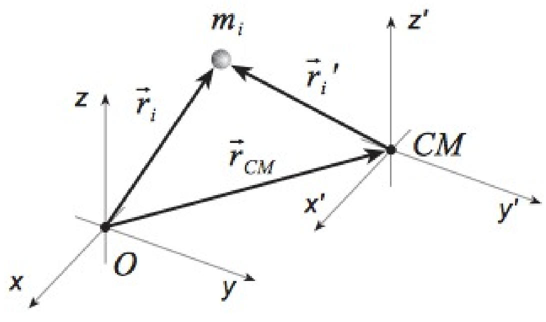
In particolare la posizione del centro di massa rispetto agli *n* punti non varia quando si cambia sistema di riferimento, ma cambiano le sue coordinate proprio rispetto a quest'ultimo. Non ci dilunghiamo nella discussione delle proprietà quali momento angolare e dinamiche rotazionali, in quanto esulerebbe dagli scopi del nostro studio. Dal momento che analizzeremo principalmente urti rettilinei tra particelle, seppur bidimensionali, ci limitiamo alle trasformazioni delle coordinate. La velocità del centro di massa è il vettore definito come:

$$\vec{v}_{CM}=\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}=\frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i \vec{P}_i}{\sum_i m_i}=\frac{\vec{P}}{M}$$

Avendo indicato con M la massa totale del corpo esteso, somma di tutte le masse delle particelle, e con $\vec{P}$ il vettore quantità di moto risultante di tutte le particelle. Il centro di massa si muove come un punto materiale, la cui massa è pari alla massa totale del sistema di punti, ed è soggetto ad una forza pari alla risultante vettoriale di tutte le forze esterne. In un sistema di punti infatti sorge il problema della trattazione di forze interne. Queste, che siano di origine gravitazionale o elettrostatica o semplici urti, sono trascurabili per il principio di azione e reazione tra tutti i punti. L'accelerazione del centro di massa sarà:

$$\vec{a}_{CM}=\frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2}=\frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i F_i^{(E)}}{\sum_i m_i}=\frac{R^{(E)}}{M}$$

Anche qui, il centro di massa si comporta come una massa puntiforme la cui accelerazione dipende dalla risultante vettoriale di tutte le forze esterne al sistema che agiscono su tutti i singoli punti ed è inversamente proporzionale alla massa totale del sistema di particelle. Da queste ultime relazioni ricaviamo che $\vec{P}=M\,\vec{v_{CM}}$ e cioè la quantità di moto del centro di massa, mentre la risultante delle forze esterne è espressa come $R^{(E)}=M\,\vec{a_{CM}}$. Osserviamo che l'azione di forze esterne al sistema ne determinerà il moto, dal momento che $\vec{a}_{CM}=\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$, allora $R^{(E)}=M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$ e perciò $R^{(E)}=\frac{d\vec{P}}{dt}$. Nel caso non vi siano forze esterne avremo $\frac{d\vec{P}}{dt}=0$ e quindi $\vec{P}=costante$; è proprio questo che assumeremo nello studio degli urti tra particelle, condizione necessaria perché si *conservi la quantità di moto*. Analizzeremo gli urti tra particelle dal punto di vista del sistema di riferimento "*di laboratorio*" e del sistema di riferimento del centro di massa, che ha come origine il centro di massa stesso. Entrambi i sistemi sono inerziali, dal momento che stiamo considerando $R^{(E)}=0$, sia perché non agiscono forze, sia perché si ha risultante nulla. La coordinata di un punto generico è data da:



$$\overline{Om_i}=\overline{O_{CM}m_i}+\overline{O_{CM}O}$$

$$\vec{r}_i=\vec{r}\,'_i+\vec{r}_{CM}$$

Derivando avremo $\frac{d\vec{r}_i}{dt}=\frac{d\vec{r}\,'_i}{dt}+\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt}$ e cioè:

$$\vec{v}_i = \vec{v}\,'_i + \vec{v}_{CM}$$

Condizione equivalente a quella di una trasformazione galileiana. Facciamo un'osservazione fondamentale: essendo il sistema di riferimento inerziale, se fossimo solidali con l'origine del sistema del centro di massa, ammetteremmo di essere fermi. Infatti la nostra posizione sarebbe individuata da $\vec{r}_{CM}=0$, pertanto avremmo $\vec{v}_{CM}=0$, e di conseguenza $\vec{P}=0$. La quantità di moto rispetto al centro di massa è nulla, dal momento che è nulla la sua velocità di trascinamento. Verificheremo in seguito la notevole utilità di queste affermazioni. Iniziamo con l'analisi dell'urto dal sistema di laboratorio. Due punti si urtano e interagiscono per un istante infinitesimo trascurabile rispetto all'osservazione. Durante questo minuscolo intervallo di tempo le particelle interagiscono tramite forze interne, dette forze impulsive, che ne modificano la quantità di moto; l'azione delle reciproche forze impulsive si consuma in un intervallo $\tau=t_2-t_i \quad \tau\rightarrow 0$. La particella m_1 esercita sulla particella m_2 una forza eguale e contraria a quella che la particella m_2 esercita su di essa. Dal terzo principio della dinamica avremo risultante nulla e pertanto conservazione della quantità di moto del sistema. In particolare abbiamo la conservazione della quantità di moto del centro di massa: $\vec{P}_{CM}=(m_1+m_2)\vec{v}_{CM}=costante$. D' altro canto, variano le quantità di moto delle singole particelle. Dal teorema dell'impulso $m_1 v_1-m_1 v_{fin}=\int_{t_1}^{t_2} F_{2,1}\, d\tau$ mentre per l'altra particella sarà $m_2 v_2-m_2 v_{fin}=\int_{t_1}^{t_2} F_{1,2}\, d\tau$, e dal momento che $F_{2,1}=-F_{1,2}$ avremo, indicando l'impulso con J , l'equivalenza $J_{2,1}=-J_{1,2}$. La quantità di moto *totale* del sistema si conserva. In presenza di forze esterne, è comunque possibile che vi sia conservazione della quantità di moto, purché le forze non siano impulsive o abbiano debole intensità.

Dal momento che non conosciamo la natura della forze di interazione tra le particelle, non possiamo sapere se queste siano o no forze conservative, di conseguenza non possiamo assumere a priori la conservazione dell'energia cinetica. Siamo certi però, dato che le posizioni dei punti nel sistema non variano dopo l'urto (ognuna compenserà lo spostamento dell'altra), del fatto che non vi sia variazione dell'energia potenziale. Pertanto tutta la variazione di energia meccanica dovrà significare una variazione di energia cinetica. Siamo certi anche del fatto che si conservi l'energia cinetica del centro di massa $E_{kCM}=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}$, perciò introduciamo il teorema di Konig $E_{kCM}+E\,'_k=E_k$. Il teorema di Konig evidenzia il collegamento tra l'energia del sistema visto da più sistemi di riferimento. Dovendo E_{kCM} essere costante, l'unica variabile dovrà essere $E\,'_k=\frac{1}{2}m_1 v\,'^2_1+\frac{1}{2}m_2 v\,'^2_2$ .Indicando la conservazione della quantità di moto in termini generali:

$$P_{ini}=m_1 v_1+m_2 v_2=m_1 v_{1fin}+m_2 v_{2fin}=P_{fin}$$

Per poter discutere l'aspetto energetico è necessario disporre di informazioni sul tipo di urto verificatosi, in dipendenza dalle proprietà materiali delle particelle e dal loro tipo di interazione. Esistono diversi tipi di urti, per ognuno dei quali si ha un diverso risultato per quanto riguarda l'energia: abbiamo urti completamente anelastici, urti elastici e urti anelastici, questi ultimi risultano essere i più frequenti, i primi due quelli più ideali.

Prima di cimentarci nell'analisi di ciascun tipo di urto, finiamo col considerare il nostro generico urto dal punto di vista del sistema del centro di massa. Secondo il centro di massa, la propria quantità di moto è nulla, e le trasformazioni danno $v_1=v\,'_1+v_{CM}$, $v_2=v\,'_2+v_{CM}$.

Avremo, in virtù della conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_1+m_2 v_2\equiv m_1(v\,'_1+v_{CM})+m_2(v\,'_2+v_{CM})=m_1 v\,'_1+m_2 v\,'_2+(m_1+m_2)v_{CM}=0$$

E cioè

$$m_1 v\,'_1+m_2 v\,'_2=0 \;\rightarrow\; m_1 v_1=-m_2 v_2$$

Od anche:

$$m_1 v'_{1\,fin} = -m_2 v'_{2\,fin}$$

Da cui concludiamo che:

$$p_{1\,ini} = -p_{2\,ini}$$
$$p_{1\,fin} = -p_{2\,fin}$$

Dal punto di vista del centro di massa i punti si dirigono verso di esso con eguale ed opposta quantità di moto, per poi allontanarsi dopo l'urto con eguale ed opposta quantità di moto finale. Anche se l'urto fosse obliquo secondo il sistema di laboratorio, il centro di massa, essendo intrinsecamente collegato al sistema di particelle stesso, vedrà queste due avvicinarsi sempre sullo stesso asse, con quantità di moto eguale ed opposta.
L'urto completamente anelastico è una situazione molto ideale. In particolare le due particelle dopo l'urto rimangono attaccate e continuano a muoversi come un unico corpo con la velocità del loro centro di massa. Risulterà infatti:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{\S} \equiv (m_1 + m_2) v_{CM}$$

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Il fenomeno è spiegato dal fatto che le due particelle si deformano a vicenda, perciò parte della loro energia cinetica viene assorbita nella reciproca deformazione. (in un tempo brevissimo τ), L'energia viene investita affinché i due corpi restino attaccati. Generalmente avremo:

$$E_{kin} \equiv \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E'_k + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 \neq E_{k\,fin}$$

Avendo utilizzato il teorema di Konig. Dove vale la relazione:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E'_k$$

In quanto la suddetta energia è stata impiegata durante l'interazione tra le particelle.
Studiamo ora il caso di un urto completamente anelastico tra una particella m_1 , provvista di v_1 e una particella m_2 , in quiete.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{CM} \quad \rightarrow \quad v_{CM} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Per l'energia cinetica avremo

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \text{e dopo l'urto risulterà:} \quad E_{k\,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$E_{k\,fin} = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2$$

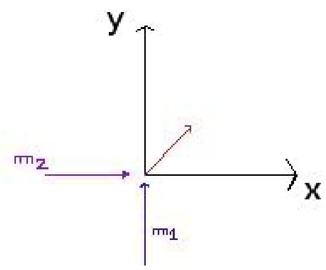
Analizziamo ora il rapporto $\frac{E_{k\,fin}}{E_{kin}}$:

$$\frac{E_{k\,fin}}{E_{kin}}=\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

E discutiamo i vari casi: nel caso fosse $m_1=m_2=m$ avremo $v_{CM}=\frac{v_1}{2}$ (velocità dimezzata).
Mentre il rapporto vale:

$$\frac{E_{k\,fin}}{E_{kin}}=\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$$

Viene quindi dissipata metà dell'energia cinetica iniziale. Nel caso invece in cui sia $m_1 \gg m_2$ ci avvaliamo della facoltà di trascurare la massa della seconda particella nelle equazioni, dalle quali risulta $v_{CM}=v_1$ (la massa m_1 continuerà a muoversi attaccata a m_2 come se non vi fosse stato alcun urto). Intuitivamente vediamo subito che $\frac{E_{k\,fin}}{E_{kin}}=1$, non vi è dissipazione alcuna.
Consideriamo un urto completamente anelastico individuato nel piano *x,y*. Le particelle viaggiano perpendicolarmente tra loro e proseguiranno unite dopo l'urto.



Vale la relazione

$$m_1 v_1+m_2 v_2=(m_1+m_2)\, v_{CM}$$

Attraverso le due proiezioni:

$$p_y=m_1 v_1=p_{y\,fin}=(m_1+m_2)\, v_{CM}\sin(\theta)$$
$$p_x=m_2 v_2=p_{x\,fin}=(m_1+m_2)\, v_{CM}\cos(\theta)$$

Pertanto

$$\tan(\theta)=\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}$$

E il modulo della velocità finale, quella del loro centro di massa, sarà:

$$|v_{CM}|=\sqrt{\frac{(m_1 v_1)^2+(m_2 v_2)^2}{m_1+m_2}}$$

Mentre l'angolo che formeranno con l'asse x dopo l'urto sarà:

$$\theta=\tan^{-1}\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}$$

Discutiamo ora un altra situazione piuttosto ideale di urto tra particelle, il caso di un urto elastico. Questa volta le particelle, dotate di particolari proprietà elastiche, torneranno al loro stato iniziale rispondendo elasticamente alla reciproca deformazione. Possiamo pertanto parlare di conservazione dell'energia cinetica. Valgono quindi entrambe le leggi di conservazione $p_{ini} = p_{fin}$, $E_{kin} = E_{k\,fin}$.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{1\,fin} + m_2 v_{2\,fin} = (m_1 + m_2) v_{CM}$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\text{fin}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\text{fin}}^2$$

Arriviamo a un sistema di equazioni, vogliamo trovare le relazioni per le velocità finali delle particelle. Sono chiaramente necessarie ulteriori informazioni su ciò che accade in seguito all'urto, d'altro canto le relazioni per le velocità sono ricavabili dal momento che disponiamo di due equazioni per due eventuali incognite (a meno di casi bidimensionali),il sistema si può risolvere attraverso la risoluzione di un equazione di secondo grado. Tuttavia per una descrizione più dettagliata e indipendente da informazioni aggiuntive, possiamo ricavare le relazioni per le variabili più rigorosamente. Per comodità, osserviamo l'urto dal sistema di riferimento del centro di massa, dove ricordiamo essere $P' = 0$, avremo:

$$\begin{aligned} m_1 v'_1 &= -m_2 v'_2 \\ m_1 v'_{1\,fin} &= -m_2 v'_{2\,fin} \end{aligned} \quad (§.0)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1\,fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2\,fin}$$

Sostituiamo i valori e arriviamo a:

$$m_1 (v'^2_1 - v'^2_{1\,fin}) = m_2 (v'^2_{2\,fin} - v'^2_2)$$

Che riscriviamo

$$m_1 (v'_1 + v'_{1\,fin})(v'_1 - v'_{1\,fin}) = m_2 (v'_{2\,fin} + v'_2)(v'_{2\,fin} - v'_2) \quad (§.1)$$

D'altro canto, sottraendo membro a membro le (§.0)

$$m_1 v'_1 - m_1 v'_{1\,fin} = -m_2 v'_2 + m_2 v'_{2\,fin}$$

$$m_1 (v'_1 - v'_{1\,fin}) = m_2 (v'_{2\,fin} - v'_2) \quad (§.2)$$

Accostiamo la (§.2) alla (§.1) e dividiamo membro a membro

$$v'_1 + v'_{1\,fin} = v'_{2\,fin} + v'_2$$

Sempre attraverso le (§.0) possiamo esprimere questa relazione come:

$$v'_1 + v'_{1\,fin} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1\,fin} - \frac{m_1}{m_2} v'_1$$

$$v'_1 + v'_{1\,fin} = -\frac{m_1}{m_2} (v'_1 + v'_{1\,fin})$$

Ovvero:

$$v'_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = -v'_{1\,fin} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

E quindi:

$$v'_1 = -v'_{1\,fin}$$

Svolgendo il procedimento analogo per ottenere la relazione tra velocità iniziale e finale della seconda massa arriviamo alle due relazioni:

$$v'_1 = -v'_{1\,fin}$$
$$v'_2 = -v'_{2\,fin}$$

Dal momento che l'urto è elastico, nel sistema del centro di massa le velocità finali di ogni particella sono eguali in modulo alle velocità iniziali, ma con verso opposto. Questa è la caratteristica principale di questo tipo di urti e deriva direttamente dalla conservazione dell'energia cinetica: non vi è dissipazione. Ma arriviamo al nostro punto di interesse: dal punto di vista del sistema di laboratorio le velocità sappiamo essere viste relativamente secondo la relazione:

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v_{CM}}$$

Dove sappiamo essere

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Associamo a questa trasformazione ogni relazione:

$$v_{1\,fin} = v'_{1\,fin} + v_{CM}$$

Dove sappiamo che

$$v'_{1\,fin} = -v'_1$$

Dunque ricaviamo:

$$v_{1\,fin} = v_{CM} - v'_1$$

Ancora non ci basta, vogliamo esprimere la velocità finale in funzione della velocità iniziale vista dal sistema di laboratorio stesso, e non relativa al centro di massa. Possiamo operare su:

$$v_1 = v'_1 + v_{CM} \;\rightarrow\; v'_1 = v_1 - v_{CM}$$

Ovvero ricaviamo

$$v_{1\,fin} = 2\mathrm{v}_{CM} - v_1$$

Arriviamo dunque a:

$$v_{1\,fin} = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1$$

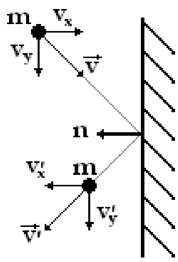
Procediamo analogamente per trovare l'espressione della velocità finale della seconda particella. Finalmente avremo:

$$v_{1\,fin} = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2\mathrm{m}_2 v_2}{m_1 + m_2}$$
$$v_{2\,fin} = \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2} \qquad (§.3)$$

Fissato un verso per le velocità positive e negative sarà possibile ricorrere a questa formula senza cadere in errore, il che risulta assai probabile. Studiamone i casi: se nell'urto una particella ha massa tale che $m_1 \gg m_2$, la sua velocità finale risulta eguale alla velocità iniziale. Nel caso fosse $m_1 = m_2$, avremo lo scambio delle rispettive velocità iniziali tra le particelle. Il secondo caso è la perfetta conseguenza dell'elasticità dell'urto, che comporta una situazione di simmetria tre le velocità iniziali e finali. Questo tipo di urto risulta essere piuttosto ideale e assai improbabile nel mondo macroscopico, dal momento che dipende dalle proprietà intrinseche della materia di cui i corpi sono costituiti, dalla loro simmetria geometrica e altre caratteristiche quali proprietà elastiche e distribuzione di elasticità. Discutiamo un altro caso, che risulterà in numerose situazioni nel nostro studio, riguardante l'urto elastico tra una particella di massa m_1 dotata di velocità v_1 e una parete, la cui massa consideriamo essere (in confronto a quella della particella) $m_2 = \infty$. Poniamo inizialmente che la direzione di incidenza della particella sia normale a quella della parete. Dalla (§.3) risulta:

$$v_{1\,fin} = -v_1$$

Avendo posto $v_2 = 0$. Chiaramente, trattandosi di un urto elastico, la particella rimbalzerà conservando totalmente la sua energia cinetica e invertirà il verso del suo moto. La parete esercita una forza esterna impulsiva, paragonabile a una forza interna, la quale fa perciò variare la quantità di moto. La variazione della quantità di moto la abbiamo chiaramente solo nel verso, eppure ciò è conseguenza di una forza impulsiva che agisce nel sistema come una forza interna al sistema. Possiamo interpretare il nostro risultato in un altro modo: dal momento che abbiamo $m_2 \gg m_1$, in base alla nostra analisi precedente avremo che la parete m_2 dovrà conservare il suo stato iniziale (di quiete). Pertanto, sempre dalle (§.3) abbiamo che la sua velocità finale non dovrà essere influenzata da quella della particella. Il risultato (relativo alla parete) è lo stesso che si avrebbe da un urto completamente anelastico, con la differenza che la velocità del centro di massa rimane nulla (la parete non si "accorge" dell'urto avvenuto e continua a muoversi con la stessa velocità iniziale, nulla). Al contrario dell'urto completamente anelastico però, qui si ha la totale conservazione dell'energia cinetica. Consideriamo ora la situazione nella quale la direzione di incidenza della particella formi con la parete un angolo θ.



L'urto è obliquo, scomponiamo la velocità incidente nelle componenti $v_1 \cos(\theta)$ e $v_1 \sin(\theta)$, la prima normale alla parete, la seconda parallela alla parete. Avremo che la prima componente reagisce all'urto esattamente come nel caso dell'incidenza ortogonale, in effetti è questo il motivo per cui otteniamo una riflessione della traiettoria: dall'interazione della componente normale. Nel caso della componente parallela avremo che questa rimane invariata nel verso dal momento che la parete non esercita alcuna forza parallela (non essendoci attriti). In prima approssimazione questo è ciò che avviene nella riflessione di un raggio di luce. L'angolo di incidenza formatosi con la normale alla parete è eguale all'angolo di riflessione e con questi complanare. Anche in questo caso si ha conservazione dell'energia cinetica, ma non della quantità di moto (almeno in direzione).

Procediamo dunque con la trattazione dell'urto anelastico. Diversamente da gli altri due tipi di urti, quest'ultimo è certamente il più comune e probabile. Dopo l'urto le due particelle ritornano separate, abbiamo la conservazione della quantità di moto, ma non dell'energia cinetica. I corpi investono parte della loro energia cinetica nella reciproca deformazione (non sono dotati di proprietà elastiche come nel caso dell'urto elastico; d'altra parte non dissipano nemmeno tutta la loro energia cinetica in una deformazione tale che rimangano attaccati, come in un urto completamente anelastico). Appare chiaro che l'urto anelastico risulti se vogliamo una via di mezzo tra i casi descritti in precedenza. Avremo quindi $E_{kin} < E_{k\,fin}$. Ancora una volta osserviamo l'urto dal sistema di riferimento del centro di massa, dove ricordiamo essere $P'=0$. Quindi $p'_{ini}=-p'_{fin}$ ed anche $p'_{fin}=-p'_{ini}$.

Definiamo *coefficiente di restituzione* il rapporto:

$$\mathscr{E}=-\frac{p'_{fin}}{p'_{ini}}=-\frac{v'_{1\text{fin}}}{v'_{1\text{in}}}=-\frac{v'_{2\text{fin}}}{v'_{2\text{in}}}$$

Eguale per entrambe le particelle, dal momento che $P'=0$. Questo rapporto descrive la diminuzione della velocità a causa dell'urto, in altre parole è da intendere come una misura della dissipazione energetica.Ciascuna particella, durante l'urto, osserverà la propria quantità di moto diminuire progressivamente fino a zero, per poi ricrescere e dirigersi in direzione opposta con una determinata diminuzione del proprio modulo.L'energia cinetica finale sarà:

$$E'_{k\,fin}=\frac{1}{2}m_1 v'^2_{1\,fin}+\frac{1}{2}m_2 v'^2_{2\,fin} \quad \text{con} \quad [v'_{1\,fin}=-\mathscr{E}\,v'_{1\text{in}} \;\;,\;\; v'_{2\,fin}=-\mathscr{E}\,v'_{2\text{in}}]$$

$$E'_{k\,fin}=\frac{1}{2}m_1\mathscr{E}^2 v'^2_{1\text{in}}+\frac{1}{2}m_2\mathscr{E}^2 v'^2_{2\text{in}}=\mathscr{E}^2\left(\frac{1}{2}m_1 v'^2_{1\text{in}}+\frac{1}{2}m_2 v'^2_{2\text{in}}\right)$$

Notiamo subito che l'energia cinetica finale sarà pari a $E'_{k\,fin}=\mathscr{E}^2 E'_{k\,ini}$. La variazione dell'energia cinetica rispetto a E'_{kin} sarà perciò descritta da:

$$\wp=\frac{E'_{k\,fin}-E'_{k\,ini}}{E'_{k\,ini}}=\frac{\mathscr{E}^2 E'_{k\,ini}-E'_{k\,ini}}{E'_{k\,ini}}=\frac{E'_{k\,ini}(\mathscr{E}^2-1)}{E'_{k\,ini}}=(\mathscr{E}^2-1)$$

Questa importante relazione ci dice che nel caso di un urto completamente anelastico la variazione di energia sarà negativa $\wp=-1$ in quanto $\mathscr{E}=0$ (non vi è velocità delle particelle prese singolarmente, in quanto proseguono assieme con la stessa velocità). Se siamo in presenza di un urto elastico avremo ovviamente $\mathscr{E}=1$ e quindi $\wp=0$, in quanto si ha conservazione dell'energia cinetica. Ritorniamo al nostro sistema di riferimento di laboratorio e analizziamo lo stesso urto tramite le note trasformazioni

$$v_{1\,fin}=v'_{1\,fin}+v_{CM} \qquad v_{2\,fin}=v'_{2\,fin}+v_{CM}$$

Dal momento che sappiamo essere $v'_{1\,fin}=-\mathscr{E}\,v'_{1\text{in}}$, $v'_{2\,fin}=-\mathscr{E}\,v'_{2\text{in}}$ risulterà:

$$v_{1\,fin}=v_{CM}-\mathscr{E}\,v'_{1\text{in}} \;\;,\;\; v_{2\,fin}=v_{CM}-\mathscr{E}\,v'_{2\text{in}}$$

Però vogliamo ricavare la velocità finale delle particelle in funzione della loro velocità iniziale relativa al sistema di laboratorio. Grazie alle trasformazioni:

$$v'_{1\text{in}}=v_{1\text{in}}-v_{CM} \;\;,\;\; v'_{2\text{in}}=v_{2\text{in}}-v_{CM}$$

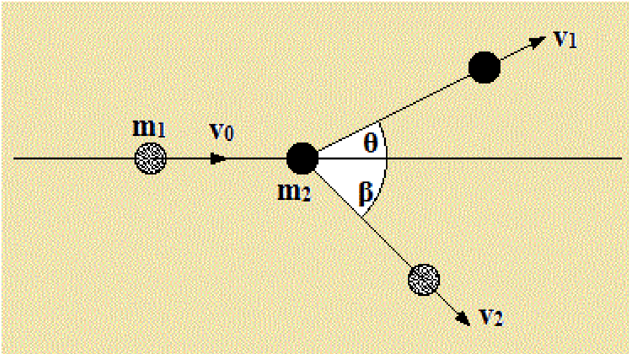
Arriviamo finalmente alle relazioni definitive per le velocità finali delle singole particelle in funzione delle loro velocità iniziali, del coefficiente di restituzione e del rapporto tra le loro masse.

$$v_{1\,fin}=\frac{(m_1-\mathscr{E}\,m_2)\,v_{1\text{in}}+m_2(1+\mathscr{E})\,v_{2\text{in}}}{m_1+m_2}$$
$$v_{2\,fin}=\frac{m_1(1+\mathscr{E})\,v_{1\text{in}}+(m_2-\mathscr{E}\,m_1)\,v_{2\text{in}}}{m_1+m_2} \qquad (\S.4)$$

Discutiamo anche qui i possibili casi. In un urto completamente elastico abbiamo detto sarà $\mathscr{E}=0$, perciò avremo $v_{1\,fin}=v_{2\,fin}=v_{CM}$, come abbiamo già visto. Nell'urto elastico avremo $\mathscr{E}=1$, perciò per velocità finali le (§.4) si riducono alle (§.3), proprie dell'urto elastico in questione. Abbiamo perciò ricavato che in urto anelastico le velocità finali delle singole particelle dipendono dal coefficiente di restituzione, pertanto nella risoluzione di un dato problema è necessario disporre del coefficiente o almeno della velocità finale dell'altra particella.
Consideriamo una particella lasciata cadere con velocità nulla da un'altezza h_1. Questa urta il pavimento e si osserva che risale ad una quota $h_2<h_1$, calcolare il coefficiente di restituzione. Nell'urto con il pavimento l'energia iniziale viene dissipata in deformazione, consideriamo il caso limite con $m_2=\infty$, avremo il lavoro svolto dalla forza peso tale che la velocità al momento dell'urto sarà $v_{ini}=\sqrt{2\,g\,h_1}$. La velocità finale sarà quindi $v_{fin}=-\sqrt{2\,g\,h_2}$ (considerando negativo il verso opposto a quello iniziale). Dalle (§.4) abbiamo la relazione $v_{1\,fin}=-\mathscr{E}\,v_{ini}$, perciò ricaviamo:

$$\mathscr{E}=-\frac{v'_{fin}}{v'_{ini}}=-\frac{v_{fin}}{v_{ini}}=\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

Risulta chiaro che se il rapporto $\frac{h_2}{h_1}=1$ ci saremmo trovati di fronte il caso di un urto elastico con $\mathscr{E}=1$. Per terminare affrontiamo il caso di un urto del tipo mostrato in figura.



Dove la particella di massa m_2 è in quiete. Vogliamo ricavare in funzione della velocità iniziale della prima particella, la velocità finale e l'angolo di deviazione β della seconda particella. Consideriamo prima il caso in cui $m_1=m_2=m$. Il problema è bidimensionale, imponiamo la conservazione della quantità di moto in entrambi gli assi *x* e *y*.

$$m\,v_1=m\,v_{1\,fin}\cos\theta+m\,v_{2\,fin}\cos\beta$$
$$0=m\,v_{1\,fin}\sin\theta-m\,v_{2\,fin}\sin\beta$$

Dove nella seconda equazione abbiamo considerato il fatto che la velocità iniziale della particella non ha proiezione sull'asse delle ordinate (moto orizzontale iniziale). La velocità della seconda particella dopo l'urto ha inclinazione negativa rispetto all'asse x, pertanto la direzione del suo vettore velocità punta verso la direzione delle *y negative*. Ricaviamo perciò:

$$m v_{2\,fin} \sin\beta = m v_{1\,fin} \sin\theta$$
$$m v_{2\,fin} \cos\beta = m v_1 - m v_{1\,fin} \cos\theta$$

Da cui segue:

$$\tan\beta = \frac{m v_{1\,fin} \sin\theta}{m v_1 - m v_{1\,fin} \cos\theta} = \frac{v_{1\,fin} \sin\theta}{v_1 - v_{1\,fin} \cos\theta}$$

L'angolo di deviazione sarà perciò:

$$\beta = \tan^{-1} \frac{v_{1\,fin} \sin\theta}{v_1 - v_{1\,fin} \cos\theta}$$

Il valore di questo angolo ci consente di conoscere la velocità finale della seconda particella. Possiamo risolvere il problema applicando il teorema di Carnot o sommando vettorialmente, notando che $v_{2\,fin} = v_1 - v_{1\,fin}$. O più semplicemente, conoscendo l'angolo di deviazione della prima particella, la sua velocità finale, e riprendendo la relazione delle singole componenti $m v_{2\,fin} \sin\beta = m v_{1\,fin} \sin\theta$ perciò:

$$v_{2\,fin} = v_{1\,fin} \frac{\sin\theta}{\sin\beta}$$

Od anche, come detto, dal teorema di Carnot:

$$v_{2\,fin} = \sqrt{v_1^2 + v_{1\,fin}^2 - 2 v_1 v_{1\,fin} \cos\theta}$$

Consideriamo ora il caso in cui le particelle abbiano masse diverse. Come è possibile verificare subito, l'espressione per ricavare l'angolo di deviazione della seconda particella non varia. Tuttavia avremo:

$$v_{2\,fin} = v_{1\,fin} \frac{\sin\theta}{\sin\beta} \frac{m_1}{m_2}$$

Si noti che non abbiamo preso in considerazione il fattore energetico dell'urto, dal momento che non disponevamo di sufficienti informazioni circa la natura dell'urto. Supponiamo che l'urto sia elastico, come sappiamo valgono $p = cost\,, E_k = cost$, misuriamo il trasferimento di energia cinetica dalla prima alla seconda particella, sempre nel caso in cui le masse siano eguali. Vale sempre la relazione trovata per l'angolo di deviazione β . Dalla figura ricaviamo le espressioni trigonometriche:

$$v_{1\,fin} = v_1 \cos\theta$$

$$v_{2\,fin} = v_1 \sin\theta$$

Per la conservazione dell'energia cinetica:

$$E_{k\,ini} = \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{k\,fin} = \frac{1}{2} m v_{1\,fin}^2 + \frac{1}{2} m v_{2\,fin}^2$$

Prese singolarmente:

$$(E_{k,1})_{fin}=\frac{1}{2}m v_{1\,fin}^2=\frac{1}{2}m v_1^2\cos^2\theta=(E_{k,1})_{ini}\cos^2\theta$$

$$(E_{k,2})_{fin}=\frac{1}{2}m v_{2\,fin}^2=\frac{1}{2}m v_1^2\sin^2\theta=(E_{k,1})_{ini}\sin^2\theta=(E_{k,1})_{ini}\cos^2\beta$$

Dove per l'ultima relazione è stata presa in considerazione la somma vettoriale rispetto al secondo triangolo rettangolo di angolo acuto di deviazione β . L'energia trasferita dalla particella incidente alla particella in quiete è funzione dell'angolo β . Verifichiamo che per valori $\beta=0$ la prima particella trasferisce totalmente la sua energia alla seconda, che si mette in moto sulla stessa direzione iniziale della prima particella. D'altro canto, la prima particella proseguirà indisturbata il suo moto orizzontale nel caso $\beta=\pi/2$, il trasferimento di energia sarà nullo, e la particella in quiete conserverà il suo stato.
Conclusa la trattazione sugli urti in Meccanica classica, proseguiamo con lo studio relativistico.

Nell'ultima sezione abbiamo parlato di energia, cinetica e talvolta potenziale.
Chiaramente abbiamo sempre considerato il caso di urti a basse velocità, o meglio, basse velocità relativamente a quella della luce. Gli ***urti relativistici*** comportano l'acquisizione di una nuova forma di energia, sconosciuta fino a poco più di un secolo fa. Consideriamo una particella in movimento, con quantità di moto $\vec{p}=m\vec{v}=m\frac{dx}{dt}$. Come sistema di riferimento ci avvaleremo di quello solidale con la particella. Come abbiamo visto il tempo proprio risulterà minore rispetto a quello misurato da un sistema in movimento (in movimento solo rispetto al sistema dove si misura il tempo proprio). Dovendo essere $dt=\Upsilon_0\,dt'$, scriveremo la relazione della quantità di moto relativistica per un sistema di riferimento solidale con la particella stessa come:

$$\vec{p}=m\frac{d\vec{x}}{dt'}=m\frac{d\vec{x}}{dt\,\Upsilon_0^{-1}}=m\Upsilon_0\vec{v}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v} \quad (1.1)$$

Come al solito, questa espressione per $v\ll c$ assume la nota forma classica. In particolare notiamo:

$$m_0=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

La massa della particella a velocità elevate subisce una crescita, proporzionale al fattore di Lorentz e tenderà all'infinito per velocità tendenti a quelle della luce. La massa assume quindi la denominazione di *massa relativistica*.

D'altra parte conserva integralmente la forma classica, almeno in termini formali, la relazione:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Nota come *seconda legge di Newton*. A questo punto ci chiediamo: ammettendo che un corpo viaggi già ad una velocità costante prossima a quella della luce, che effetto avrà su di esso l'applicazione di una forza e quindi di un'accelerazione? Ovviamente non potrà raggiungere tantomeno superare la velocità c . Discutiamo subito perché; per farlo consideriamo il rapporto tra crescita infinitesima della quantità di moto e quello della velocità iniziale della particella.

Differenziamo la (1.1) e dividiamo per $p=m\Upsilon_0 v$;

$$dp=m\,d(\Upsilon_0 v)=m\,d\Upsilon_0 v+m\Upsilon_0 dv$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{m\,d\Upsilon_0 v}{m\Upsilon_0 v}+\frac{m\Upsilon_0 dv}{m\Upsilon_0 v}=\frac{d\Upsilon_0}{\Upsilon_0}+\frac{dv}{v}$$ che riscriviamo $$\frac{dp}{p}=\frac{dv}{v}\left(1+\frac{d\Upsilon_0/\Upsilon_0}{dv/v}\right)$$

Risulta necessario conoscere il rapporto $\frac{d\Upsilon_0}{\Upsilon_0}$. Sappiamo che $\Upsilon_0=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, perciò

differenziamo e dividiamo per Υ_0 : $d\Upsilon_0=d\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}d\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ dove consideriamo chiaramente $c=costante$.

$$d\Upsilon_0=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(\frac{-2v\,dv}{c^2}\right)$$ e quindi $$d\Upsilon_0=\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{v\,dv}{c^2}=\frac{v}{c^2}\Upsilon_0^3 dv$$, per semplicità riscriviamo, senza semplificare:

$$d\Upsilon_0=\frac{v^2}{c^2}\Upsilon_0^3\frac{dv}{v}$$ e quindi esprimiamo il rapporto $$\frac{d\Upsilon_0}{\Upsilon_0}=\frac{v^2}{c^2}\Upsilon_0^2\frac{dv}{v}$$

Andando perciò a sostituire:

$$\frac{dp}{p}=\frac{dv}{v}\left(1+\frac{\frac{v^2}{c^2}\Upsilon_0^2\frac{dv}{v}}{dv/v}\right)=\frac{dv}{v}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\Upsilon_0^2\right)=\Upsilon_0^2\frac{dv}{v}$$

Ricaviamo il rapporto di crescita $\frac{dv}{v}$:

$$\frac{dv}{v}=\Upsilon_0^{-2}\frac{dp}{p}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dp}{p}$$

Otteniamo che l'aumento relativo di velocità è $1/\Upsilon_0^2$ volte quello dell'aumento relativo della quantità di moto. Per valori prossimi a c l'applicazione di un'accelerazione non ha più effetto diretto sulla quantità di moto, bensì risulta che l'aumento di velocità andrà a determinare la crescita del fattore di Lorentz. Per valori $v\to c$ la variazione dv tenderà a zero, e cioè inizia a cessare la variazione di velocità, come si verifica dalla relazione. La quantità di moto è in diretta relazione con l'energia cinetica, come abbiamo precedentemente discusso. Dalla definizione di lavoro:

$$dW=\vec{F}\cdot ds=\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot ds=d\vec{p}\cdot\frac{ds}{dt}=d\vec{p}\cdot\vec{v}$$

La variazione infinitesima della quantità di moto sarà, come abbiamo precedentemente calcolato:

$$d\vec{p}=p\Upsilon_0^2\frac{d\vec{v}}{v}$$ pertanto risulta:

$$dW = p\,\Upsilon_0^2 \frac{d\vec{v}}{v}\cdot\vec{v} = m\,\Upsilon_0^3 \cancel{v} \frac{d\vec{v}}{\cancel{v}}\cdot\vec{v} = m\,\Upsilon_0^3 d\vec{v}\cdot v$$

Dal momento che $p = m\Upsilon_0 v$; Quindi $dW = m\Upsilon_0^3 v\,dv$ rappresenta il lavoro infinitesimo compiuto da una forza costante in un tratto infinitesimo di traiettoria su di una particella in movimento. Conoscendo i rapporti di crescita tra velocità e quantità di moto siamo stati in grado di derivare questa espressione. In meccanica classica d'altra parte questi procedimenti risultano superflui, dato che non si lavora con limiti di velocità. L'ideale adesso sarebbe analizzare il tasso di crescita del fattore di Lorentz, quantità che abbiamo già detto essere $d\Upsilon_0 = \frac{v}{c^2}\Upsilon_0^3 dv$

nell'espressione del lavoro sostituiamo il termine $\Upsilon_0^3 = d\Upsilon_0 \frac{c^2}{v\,dv}$ e otteniamo:

$$dW = m c^2\, d\Upsilon_0$$

Il lavoro necessario per portare una particella dalla quiete ($v=0, \Upsilon_0=1$) allo stato di moto è:

$$W = m c^2 \int_1^{\Upsilon} d\Upsilon_0 = m c^2 [\Upsilon_0]_1^{\Upsilon} = m c^2 (\Upsilon - 1)$$

Abbiamo tutto il diritto di considerare il lavoro speso sulla particella come una forma di energia di cui la particella entra in possesso. Scriviamo dunque:

$$E = m(\Upsilon - 1)c^2 \quad (1.2)$$

Ci troviamo di fronte una forma di energia del tutto nuova ed estranea alla meccanica classica. Ancora una volta infatti la sua applicazione a fenomeni ordinari come quelli della nostra vita quotidiana risulta superflua. Per esprimere l'energia cinetica di una particella in moto con velocità modesta si ricorre alla classica $\frac{1}{2} m v^2$. Dovremo perciò assumere che la (1.2) per velocità $v \ll c$ si riduca alla forma classica. Come già discusso, l'aumento della velocità di una particella a velocità prossime a quelle della luce corrisponde ad un aumento del fattore di Lorentz. Sviluppiamo quest'ultimo in serie binomiale fino al secondo termine.

$$\Upsilon(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Lo sviluppo di una funzione del tipo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ arrestato al secondo termine è:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} \quad \text{per} \quad x \ll 1$$

$$\Upsilon(v) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \Upsilon^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad \text{con} \quad v^2 \ll c^2$$

Nella (1.2) avremo perciò:

$$E = m\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1\right)c^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

In linea con la nostra previsione, almeno in prima approssimazione. Per velocità estremamente elevate è quindi necessario parlare di una nuova forma di energia cinetica. Sviluppando la (1.2) arriviamo a:

$$E = m\Upsilon c^2 - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

Che rappresenta, come abbiamo detto, l'energia cinetica della particella. Questa energia cinetica è data dalla differenza tra i valori $m\Upsilon c^2$ e mc^2, il primo variabile con la velocità, il secondo proporzionale alla massa della particella (supposta costante), e pertanto $mc^2 = costante$. Ancora una volta, per valori della velocità prossimi a quelli della luce, la massa, e quindi l'energia, tenderà all'infinito. Ponendo quindi:

$$E = m\Upsilon c^2 \qquad E_0 = mc^2 \qquad E_k = m\Upsilon c^2 - mc^2$$

Avremo che l'*energia totale* posseduta da una particella corrisponde a:

$$E = E_k + E_0$$

Data dalla somma della sua energia cinetica e della sua *energia a riposo*. L'energia a riposo è direttamente proporzionale alla massa della particella ed è sempre costante (in particolare quando la particella è in quiete $E = E_0$). Tutto è potenzialmente energia, la massa e l'energia sono due facce della stessa medaglia. Provvederemo ora a ricercare una relazione tra quantità di moto della particella ed energia totale. Sappiamo che:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{elevando al quadrato avremo} \quad \rightarrow E^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$E^2 - E^2 \frac{v^2}{c^2} = m^2 c^4$$

Dall'energia totale e dalla quantità di moto operiamo un artifizio e otteniamo $E = m\Upsilon v \frac{c^2}{v} = p \frac{c^2}{v}$, ricaviamo perciò $E^2 = p^2 \frac{c^4}{v^2}$, che andiamo a sostituire ottenendo:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

Perciò ricaviamo la relazione fondamentale della relatività ristretta:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (1.3)$$

Che rappresenta l'espressione dell'energia in funzione della quantità di moto della particella e dell'energia a riposo . Per una particella in quiete, e quindi $p = 0$,risulterà:

$$E = m c^2$$

Per una particella con massa nulla, risulterà invece:

$$E = p c$$

Ed è questo il caso della particella tramite dell'interazione elettromagnetica, il *fotone*. Il fatto che questi abbia massa nulla implica proprio il fatto che possa viaggiare alla velocità della luce (effettivamente, i fotoni rappresentano le manifestazione quantistica della luce in se). Come abbiamo visto infatti, essendo funzione del fattore di Lorentz, la massa relativistica tende ad assumere valori infiniti per velocità prossime a quelle della luce, di conseguenza per assurdo si assume che questa tenda ad annullarsi dal campo delle soluzioni reali. Il fotone è quindi una particella *strana e anomala*, ma il fatto che la sua massa sia nulla implica che possa viaggiare alla velocità della luce. Siamo tornati quindi alle nostre discussioni all'inizio del trattato: *nessun corpo dotato di massa può viaggiare alla velocità della luce*.
Nel nostro mondo non possiamo avere esperienza di urti relativistici, in quanto per accelerare una massa macroscopica anche soltanto a minute frazioni della velocità della luce è necessaria una vastissima quantità di energia. Tuttavia le particelle subatomiche, quali elettroni e protoni, sono state prese in considerazione da svariati decenni per verificare prima di tutto le nostre conoscenze sulla fisica atomica, la veridicità delle equazioni della relatività ristretta e la validità dei princìpi di conservazione della quantità di moto ed energia. Il mondo dell'infinitamente piccolo si è rivelato tanto intricato quanto descrivibile e prevedibile in maniera assai soddisfacente. Gli urti che si verificano non sono propriamente urti di contatto (si pensi agli urti protone-protone), bensì urti in cui le particelle arrivano ad una distanza reciproca talmente piccola da risentire delle forze elettriche e delle forze nucleari. Prendendo in considerazione un urto tra due particelle in moto una verso l'altra con velocità prossime a c, è possibile che la massa del sistema di particelle vari dopo l'urto. L'osservazione sperimentale sembrerebbe perciò contraddire i princìpi di conservazione, e qui trova *applicazione* la relatività ristretta. Dall'equivalenza di massa ed energia avremo che in un urto relativistico tra particelle subatomiche possa essere liberata dell'energia, nel caso in cui la massa finale del sistema sia diversa rispetto a quella iniziale. Scriveremo la relazione

$$m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4$$

Si parla di urto elastico nel caso in cui le particelle restino le stesse ($m_1 + m_2 \rightarrow m_1 + m_2$). Negli urti tra particelle subatomiche, al contrario delle particelle macroscopiche, *si conservano sempre la quantità di moto e l'energia totale*. Dalla (1.3) deduciamo che la conservazione dell'energia totale comporta variazioni dell'energia cinetica e dell'energia di massa (tale che l'una si converta nell'altra e viceversa). Come abbiamo detto, valgono le relazioni:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad , \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

Di cui i singoli termini sono dati da (1.1) e (1.3). Noti i valori delle masse iniziali e finali, nel caso di un urto bidimensionale, sono da determinare i valori delle velocità finali, per i quali disponiamo di due equazioni per due incognite, il problema risulta perciò risolvibile. Nel caso non fossero note le masse finali, occorre, ad esempio, fissare una variabile quale un angolo di deviazione e determinare lo stato finale in funzione di questo angolo usufruendo di entrambe le equazioni. Nel caso di più particelle avremo:

$$E_{ini} = \left(\sum E_k\right)_{ini} + \left(\sum E_0\right)_{ini} = E_{fin} = \left(\sum E_k\right)_{fin} + \left(\sum E_0\right)_{fin}$$

Dove con E_k e E_0 sono indicate rispettivamente l'energia cinetica e l'energia a riposo (o energia di massa) delle particelle. Ancora, nella conservazione dell'energia, è prevista la conversione di una di queste forme di energie nell'altra in rapporti che dipendono propriamente dal tipo di urto e dalle condizioni delle particelle. Le variazioni di energia cinetica e di energia di massa a riposo del sistema valgono infatti:

$$\Delta E_k = \left(\sum E_k\right)_{fin} - \left(\sum E_k\right)_{ini} \quad , \quad \Delta E_0 = \left(\sum E_0\right)_{fin} - \left(\sum E_0\right)_{ini}$$

Dal momento che l'energia si conserva (dato verificato sperimentalmente), *non vi dovrà essere variazione dell'energia totale*. Pertanto $\Delta E_{tot} = 0$, da cui segue:

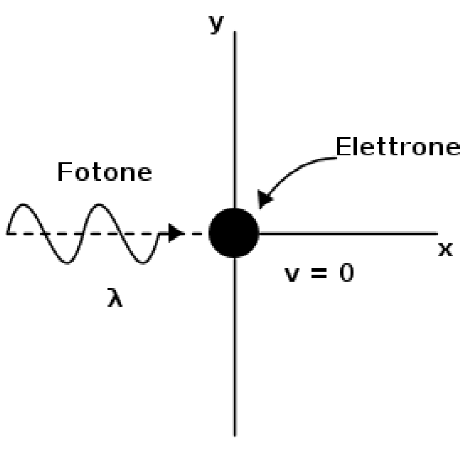
$$\Delta E_{tot} = \Delta E_k + \Delta E_0 = 0 \;\rightarrow\; \Delta E_k = -\Delta E_0 = -(\Delta m) c^2$$

Ciò illustra che una variazione dell'energia cinetica comporterà per forza una variazione dell'energia a riposo (diminuzione o aumento di massa) e viceversa. *La massa totale non si conserva*. Seguirà che nel caso di aumento di massa del sistema avremo una variazione negativa di energia cinetica (l'energia cinetica diminuisce in quanto parte di essa si trasforma in energia di massa). Nel caso di una diminuzione della massa avremo che parte dell'energia di massa iniziale si è tramutata in energia cinetica. Una estensione di questo ragionamento può essere fatta al caso del meccanismo della generazione di energia interna di una stella nascente, dove due atomi di deuterio (deutoni) collidono per generare un atomo di elio 3, isotopo dell'elio. Ora, da dati sperimentali appare che la massa del sistema dopo l'urto (la massa dell'elio 3) risulti minore di quella iniziale dei due deutoni presi singolarmente. Una parte dell'energia di massa si è quindi convertita in energia cinetica dell'elio 3 assieme ad un emissione di raggi gamma. La variazione di energia totale scambiata tra sistema e ambiente è comunque nulla. Un altro esempio interessante è la formazione di un legame tra due particelle, come il protone ed il neutrone. Questi ultimi vanno a formare un deutone (nucleo del deuterio), di massa inferiore alla somma delle singole masse delle particelle reagenti. Inoltre, perché queste siano legate, è necessaria una certa quantità di energia. Ebbene, questa energia è proprio data dalla variazione di massa del sistema, e corrisponde a $\Delta m c^2$. Volendo rompere il sistema avremo che si dovrà fornire una certa quantità di energia perché questo avvenga, questa energia fornita andrà a distribuirsi nelle masse delle singole particelle, ridandone lo stato iniziale.

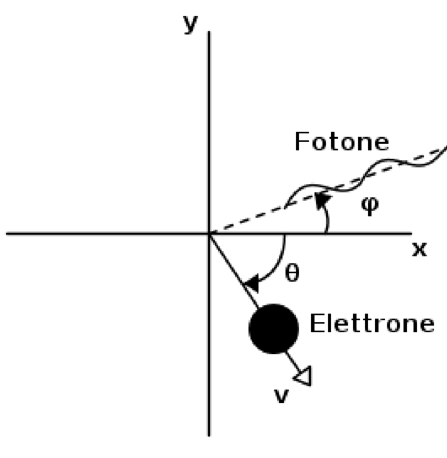
Abbiamo discusso l'energia posseduta da un fotone, particella tramite dell'interazione elettromagnetica, e abbiamo constatato essere $E = pc$. Ebbene, introduciamo la nozione di "quanto di energia", con la quale possiamo esprimere l'energia posseduta da un fotone tramite la relazione:

$$E = hf$$

Dove h rappresenta la costante di Planck, f la frequenza del fotone. Ci proponiamo di indagare sulla deviazione dei *raggi x* (fotoni ad alta frequenza) dopo aver attraversato un blocco di grafite. La deviazione di questi raggi è infatti sintomo che essi hanno perduto energia, o meglio, che la loro frequenza è diminuita. La diminuzione della frequenza comporta l'aumento della lunghezza d'onda



Prima dell'urto



Dopo l'urto

$f\lambda = c$, pertanto i raggi più deviati risulteranno quelli con energia minore e lunghezza d'onda maggiore.
Infatti per i raggi non deviati non si ha diminuzione della loro energia, come se attraversassero il blocco di grafite indisturbati. I quanti di luce urtano elasticamente gli elettroni degli atomi di grafite.
Ora, l'energia di legame di questi elettroni con i rispettivi atomi è molto piccola comparata con l'enorme energia a disposizione dei raggi x, pertanto possiamo affermare approssimativamente che l'urto avviene con elettroni liberi, e che tutta l'energia trasmessa dai fotoni agli elettroni è convertita in energia cinetica di questi ultimi. Impostiamo il problema in maniera analoga a quanto fatto per l'urto macroscopico. Valgono quindi le relazioni:

$$\vec{p}_{fotone} + \vec{p}_{elettrone} = \vec{p}\,'_{fotone} + \vec{p}\,'_{elettrone}$$

$$E_{fotone} + E_{elettrone} = E'_{fotone} + E'_{elettrone}$$

Comparate alla velocità della luce, possiamo trascurare l'energia cinetica e quindi le velocità iniziali degli elettroni. Come abbiamo studiato, l'energia di un fotone è proporzionale alla sua quantità di moto ed alla sua frequenza, eguagliando avremo

$$E = h f \quad , \quad E = p c \quad \rightarrow p = \frac{h f}{c} = h\lambda^{-1} = \frac{h}{\lambda}$$

Dal teorema di Carnot ricaviamo la quantità di moto dell'elettrone dopo l'urto

$$p'^2_{elettrone} = p^2_{fotone} + p'^2_{fotone} - 2p_{fotone}\, p'_{fotone} \cos\varphi$$

Sostituiamo a questa relazione i valori delle quantità di moto dei fotoni, indicando con λ' la lunghezza d'onda dei fotoni diffusi.

$$p'^2_{elettrone} = \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - 2\frac{h}{\lambda}\frac{h}{\lambda'}\cos\varphi$$

Dall'equazione della conservazione dell'energia ricaviamo l'energia finale dell'elettrone $E'_{elettrone} = E_{fotone} + E_{elettrone} - E'_{fotone}$. Da questo momento sappiamo due cose per certo: l'energia del fotone è esprimibile secondo l'equazione quantistica di Planck; l'energia iniziale dell'elettrone, essendo questi in quiete, sarà la sua energia di massa. Avremo perciò:

$$E'_{elettrone} = h f + m_e c^2 - h f'$$

Resta dunque da definire l'energia totale finale dell'elettrone. Dalla relatività ristretta sappiamo per certo che questa energia totale è

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \rightarrow \quad E'^2_{elettrone} - p'^2_{elettrone} c^2 = m_e^2 c^4$$

Andando perciò a sostituire le espressioni delle quantità di moto ed energie dell'elettrone:

$$(h f + m_e c^2 - h f')^2 - \left(\frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - 2\frac{h}{\lambda}\frac{h}{\lambda'}\cos\varphi\right)c^2 = m_e^2 c^4$$

Una volta computato il quadrato di trinomio arriviamo a:

$$h^2 f^2 + 2 h f m_e c^2 - 2 h^2 f f' + m_e^2 c^4 - 2 m_e c^2 h f' + h^2 f'^2 - \left(\frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - 2 \frac{h}{\lambda} \frac{h}{\lambda'} \cos\varphi\right) c^2 = m_e^2 c^4$$

Effettuando delle semplificazioni e svolgendo i calcoli al primo membro:

$$h^2 f^2 + 2 h f m_e c^2 - 2 h^2 f f' - 2 m_e c^2 h f' + h^2 f'^2 - \left(\frac{h^2 c^2}{\lambda^2} + \frac{h^2 c^2}{\lambda'^2} - 2 c^2 \frac{h}{\lambda} \frac{h}{\lambda'} \cos\varphi\right) = 0$$

Ossia:

$$h^2 f^2 + 2 h f m_e c^2 - 2 h^2 f f' - 2 m_e c^2 h f' + h^2 f'^2 - \frac{h^2 c^2}{\lambda^2} - \frac{h^2 c^2}{\lambda'^2} + 2 \frac{h^2 c^2}{\lambda \lambda'} \cos\varphi = 0$$

Dalle relazioni sulla propagazione della luce $c = \lambda f \rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$ Osserviamo che possiamo trasformare i termini $\frac{h^2 c^2}{\lambda^2} = h^2 f^2$ e $\frac{h^2 c^2}{\lambda \lambda'} = \frac{h^2 c c}{\lambda \lambda'} = h^2 f f'$. Sostituendo otteniamo:

$$h^2 f^2 + 2 h f m_e c^2 - 2 h^2 f f' - 2 m_e c^2 h f' + h^2 f'^2 - h^2 f^2 - h^2 f'^2 + 2 h^2 f f' \cos\varphi = 0$$

$$2 h f m_e c^2 - 2 h^2 f f' - 2 m_e c^2 h f' + 2 h^2 f f' \cos\varphi = 0$$

Possiamo semplificare

$$f m_e c^2 - h f f' - f' m_e c^2 + h f f' \cos\varphi = 0$$

Raccogliendo abbiamo:

$$m_e c^2 (f - f') = h f f' (1 - \cos\varphi)$$

Dividendo per $m_e c^2$ e $f f'$:

$$\frac{(f - f')}{f f'} = \frac{h (1 - \cos\varphi)}{m_e c^2}$$

Osserviamo che il primo membro è una somma di frazioni, possiamo riscriverlo

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos\varphi)$$

Moltiplichiamo l'equazione per c e rammentiamo le relazioni sulla propagazione della luce:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\varphi)$$

Abbiamo così ottenuto la *variazione della lunghezza d'onda* dei fotoni in seguito all'urto. Questa variazione è tanto più apprezzabile quanto maggiore è l'angolo di diffusione φ . Il fenomeno è noto come *effetto Compton*, dal nome del fisico statunitense Arthur Compton che per primo formulò una sua spiegazione quantistica.

Una particolare variazione si avrà nel caso in cui $\varphi = \pi/2$, e perciò $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$, detta *lunghezza* *d'onda di Compton.* Il suo valore corrisponde a:

$$\lambda_C = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\, Js}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\, kg \cdot 3{,}0 \cdot 10^{8}\, m/s} = 2{,}42 \cdot 10^{-12}\, m$$

Quei raggi la cui deviazione risulta $\varphi \approx 0$ presentano soltanto una leggerissima variazione della lunghezza d'onda.Questi ultimi conserveranno pressoché totalmente la propria energia, in quanto evidentemente urtano, se non nessuno, pochissimi elettroni.
Alcuni raggi vengono totalmente deviati e quindi ritornano alla sorgente, con lunghezza d'onda $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\pi)$, con $\cos(\pi) = -1$, allora $\Delta\lambda = 2\frac{h}{m_e c}$, in questo caso si ha una variazione massima della lunghezza d'onda e cioè dell'energia di fotoni incidenti. Il motivo per cui questo effetto non si manifesta nella nostra vita quotidiana? Come mai non rileviamo differenze apprezzabili di lunghezza d'onda ogni qualvolta la luce attraversi qualsiasi corpo? Torniamo al concetto di urto elastico. Come sappiamo, perché si abbia differenza apprezzabile di energia dopo un urto, si dovrà avere un determinato rapporto favorevole tra le masse delle particelle. L'energia di un fotone di luce visibile (con frequenza largamente più bassa di quella dei raggi x) è dell'ordine di svariate volte più piccola rispetto a quella di un elettrone, il loro rapporto risulta sfavorevole.
Pertanto per la luce visibile, i fenomeni di “scattering”, nonostante si verifichino frequentemente, sono assai poco apprezzabili. L'effetto Compton, analizzato dal punto di vista totalmente corpuscolare, è però spiegabile dal punto di vista ondulatorio, tramite l'effetto doppler.
Per introdurre l'*effetto doppler*, operiamo una opportuna digressione nello studiare le trasformazioni di Lorentz per le quantità di moto. Consideriamo una particella in moto rispetto ad un sistema in quiete *S*, secondo questi la sua energia e quantità di moto vale (per tutti gli assi):

$$\begin{aligned} E &= \Upsilon m c^2 \\ p_x &= \Upsilon m v_x \\ p_y &= \Upsilon m v_y \\ p_z &= \Upsilon m v_z \end{aligned}$$

Dove sappiamo essere $\Upsilon = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Per il sistema in moto S' avremo invece:

$$\begin{aligned} E' &= \Upsilon' m c^2 \\ p'_x &= \Upsilon' m v'_x \\ p'_y &= \Upsilon' m v'_y \\ p'_z &= \Upsilon' m v'_z \end{aligned}$$

Dove $\Upsilon' = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2}$. Risulterà importante infatti trasformare, per le trasformazioni di Lorentz, il fattore di Lorentz stesso, adattandolo a ciò che vede il sistema di riferimento in quiete. Sviluppando un calcolo che ora non riporteremo, esprimeremo la velocità v' vista dal sistema *S* tramite una trasformazione di Lorentz. Il risultato è quanto segue:

$$\Upsilon' = 1/\sqrt{1 - v'2/c^2} = \Upsilon \frac{(1 - v_0 v_x/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Dove ora il fattore di Lorentz è espresso come $\Upsilon = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$, in termini di velocità di trascinamento. Sostituendo il valore di Υ' :

$$E'=\Upsilon' m c^2=\Upsilon[\frac{m c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{m c^2 v_0 v_x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}]$$

Riconosciamo nell'espressione che il termine $\frac{m c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=E$, mentre riconosciamo il termine $\lambda m v_x=p_x$ semplificando quindi c^2 arriviamo all'espressione dell'energia della particella misurata dal sistema di riferimento in movimento:

$$E'=\Upsilon(E-v_0 p_x)$$

Analogamente, sostituendo il valore di Υ' e trasformando la velocità v'_x :

$$p'_x=\Upsilon' m v'_x=\Upsilon[\frac{m v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{m v_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}]$$

Anche qui, riconosciamo $\frac{m v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=p_x$, mentre da $E=m\Upsilon c^2 \rightarrow m(1-v^2/c^2)^{-1/2}=E/c^2$:

$$p'_x=\Upsilon(p_x-v_0 E/c^2)$$

Che corrisponde alla trasformazione per la quantità di moto osservata dal sistema di riferimento in movimento. Procedendo allo stesso modo si può dimostrare però che $p'_y=p_y$ e $p'_z=p_z$. Pertanto le trasformazioni di Lorentz per l'energia e la quantità di moto sono:

$$p'_x=\Upsilon(p_x-v_0 E/c^2) \quad , \quad p'_y=p_y$$

$$E'=\Upsilon(E-v_0 p_x) \quad , \quad p'_z=p_z$$

Le trasformazioni inverse sono:

$$p_x=\Upsilon(p'_x+v_0 E'/c^2) \quad , \quad p_y=p'_y$$

$$E=\Upsilon(E'+v_0 p'_x) \quad , \quad p_z=p'_z$$

Consideriamo ora un fotone avente energia *E* che si muove lungo una linea retta che forma l'angolo θ con l'asse *x* del sistema in quiete *S*. Provvederemo a calcolare nel sistema in moto *S* ' le espressioni di *E* ' e θ' . Possiamo esprimere la quantità di moto della particella, come abbiamo visto, tramite la relazione $p=E/c$. Tale relazione è vera in qualsiasi sistema inerziale in quanto il fotone ha sempre velocità c , quindi invariante alle trasformazioni e massa nulla. Per il sistema in quiete possiamo scrivere:

$$p_x=p\cos\theta=\frac{E}{c}\cos\theta \quad , \quad p_y=p\sin\theta=\frac{E}{c}\sin\theta \quad , \quad p_z=0$$

Allo stesso modo, per il sistema in movimento S ' scriveremo:

$$p'_x=\frac{E'}{c}\cos\theta' \quad , \quad p'_y=\frac{E'}{c}\sin\theta' \quad , \quad p'_z=0$$

Eguagliando i valori per le quantità di moto nel sistema S ' con le trasformazioni di Lorentz:

$$\frac{E'}{c}\cos\theta'=\Upsilon\left(\frac{E}{c}\cos\theta-\frac{v_0}{c^2}E\right)=\Upsilon\frac{E}{c}\left(\cos\theta-\frac{v_0}{c}\right)$$
$$\frac{E'}{c}\sin\theta'=\frac{E}{c}\sin\theta$$

Dividendo la seconda relazione per la prima: $\tan\theta'=\dfrac{\sin\theta}{\Upsilon\left(\cos\theta-\frac{v_0}{c}\right)}$

Dalla quale, noto il valore dell'angolo di inclinazione con cui viaggia la particella secondo il sistema in quiete, si potrà ricavare la relativa inclinazione vista dal sistema in moto.
Allo stesso modo per la trasformazione dell'energia:

$$E'=\Upsilon\left(E-v_0\frac{E}{c}\cos\theta\right)=\Upsilon E\left(1-\frac{v_0}{c}\cos\theta\right)$$

Consideriamo però ora il caso $\theta=0$: il fotone viaggia lungo l'asse delle ascisse. La sua energia, vista dal sistema di riferimento in movimento, equivale a

$$E'=\Upsilon E\left(1-\frac{v_0}{c}\right)=E\frac{1-\frac{v_0}{c}}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}=E\frac{\sqrt{1-\frac{v_0}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v_0}{c}}}$$

Se ad esempio *S* è il sistema in cui viene emesso il fotone di energia *E*, nel sistema in movimento *S* ' che si allontana da S con velocità v_0 , si misura un' energia *E* ' inferiore. Viceversa, se *S* ' si avvicinasse ad *S* con velocità $-v_0$, in esso si misurerebbe un'energia superiore. Chiaramente dalla differenza di queste energie si può calcolare proprio la velocità relativa tra i due sistemi v_0 .
Ora, l'energia di un quanto di luce è a noi nota come $E=hf$, la relazione precedente si scrive, semplificando la costante di Planck:

$$f'=f\frac{1-\frac{v_0}{c}}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

La quale illustra la variazione di frequenza in funzione della velocità relativa tra i due sistemi. Il fenomeno è noto come *effetto Doppler*. Questo effetto risulta di vastissima applicazione, oltretutto è ciò a cui il nostro orecchio fa fronte ogni giorno, al passaggio di un automobile o di un aereo, ovviamente in merito alla velocità del suono e alla propagazione delle onde sonore. Tuttavia il funzionamento risulta lo stesso: le onde sonore si propagano dalla sorgente ad una determinata velocità. Nel caso ci muovessimo ad una determinata velocità verso la sorgente di emissione delle onde, noteremmo un aumento relativo della frequenza delle onde: è come se muovendoci verso questa ci arrivassero più onde in uno stesso istante di tempo, provocando un'aumento apparente della loro frequenza.Inoltre l'effetto Doppler (in relazione con le onde luminose) è di importanza fondamentale per l'astronomia. Misurando per l'appunto la frequenza di un tipo di luce a noi nota che arriva da un altra galassia, notiamo che questa appare diversa da quella misurata normalmente

sulla Terra. Dalla differenza di queste frequenze determiniamo la velocità della galassia rispetto a noi. Da ciò furono scoperti i fenomeni del *Red Shifting* e del *Blue Shifting* delle galassie, e di conseguenza la comprensione che le galassie si stanno allontanando rispetto alla Terra, per via dell'espansione dell'universo.
Ritorniamo perciò alla spiegazione ondulatoria dell'*effetto Compton*. Per l'appunto, la variazione di lunghezza d'onda osservata dopo l'attraversamento del blocco di grafite da parte di raggi x è spiegabile anche tramite l'effetto Doppler:
L'elettrone in quiete viene colpito da un'onda elettromagnetica di lunghezza d'onda λ che lo accelera portandolo alla velocità v . Questo significa che il sistema di riferimento solidale con l'elettrone non coincide più con il sistema iniziale: l'elettrone ha cambiato sistema di riferimento. Quando, in questo nuovo sistema, l'elettrone emette nuovamente l'onda che lo ha raggiunto con la stessa identica lunghezza d'onda λ (gli elettroni eccitati rilasciano fotoni), quest'onda, vista nel sistema di riferimento originario, ha una lunghezza d'onda λ' più grande di λ , come prevede l'effetto Doppler. La lunghezza d'onda dell'onda dispersa è così più grande di quella dell'onda di partenza.
Vi sono altri esempi del genere. La relatività ristretta ha certamente cambiato il nostro modo di vedere il mondo; è stata letteralmente il Natale della scienza moderna, assieme alla meccanica quantistica. Per mezzo di questo trattato ho solo provveduto ad accennarne qualche aspetto,ma vi sono altri argomenti inerenti alla teoria, tra cui molti di ampio interesse, come lo spaziotempo di Minkowski, il cronòtopo,la dinamica relativistica e vari altri argomenti. Saremo mai in grado di fare esperienza diretta delle inaspettate proprietà del nostro universo? O siamo confinati ad una realtà minuta e vincolata da velocità relativamente insignificanti? Potremo mai lasciare il sistema solare? Potrà mai accadere che due gemelli separati (uno sulla terra, uno in viaggio su di un astronave che ha viaggiato per anni a grandi velocità), una volta riconciliati presentino delle differenze apprezzabili di età? La risposta potrà sembrare vaga e qualunquista: solo se tutti gli esseri umani si uniranno sotto un unica bandiera, quella del progresso. Fino a quando le nostre risorse economiche verranno investite in guerre futili,e lasceremo il potere in mano a chi del progresso ben poco importa se non per fini militari,e non si riconosceranno univocamente i diritti inequivocabili dell'uomo quanto le sue straordinarie capacità intellettive e la sua capacità di plasmare il mondo intorno a se con la collaborazione di altri uomini, e si commetteranno stragi di studenti, e l'odio prevarrà sulla ragione...*homo homini lupus.*

Matteo Parriciatu