

Approccio classico alla teoria magnetica della materia

Intuitivamente pare lecito accostare il formalismo matematico usato nell'ambito dei fenomeni di polarizzazione al caso della magnetizzazione di determinate sostanze. La situazione è certamente più intricata, poiché è noto sperimentalmente che non tutti i materiali conduttori (e quindi più soggetti a fenomeni di magnetizzazione) reagiscono alla stessa maniera quando investiti da un campo magnetico \mathbf{B} . Com'è noto, si classificano in diamagnetici, paramagnetici e ferromagnetici quei materiali che, rispettivamente, immersi in un campo magnetico, vengono respinti, attratti o fortemente attratti. Possiamo immaginare che le molecole dei suddetti materiali si orientino secondo le linee del campo. Se \mathbf{m} è il momento magnetico delle molecole, definiamo il *vettore magnetizzazione*

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{\tau}$$

ovvero \mathbf{M} è il *momento magnetico per unità di volume* τ . Si ha che nei diamagneti \mathbf{M} risulta opposto a \mathbf{B} , a differenza degli altri due casi. In generale questa magnetizzazione si manifesta esternamente intervenendo sul valore del campo magnetico stesso. Se \vec{B}_o è il campo magnetico misurato in assenza del materiale magnetizzato e \vec{B} è il campo misurato una volta avvenuta la magnetizzazione si trova che il rapporto $B/B_o = k_m$ è detto permeabilità magnetica relativa del mezzo considerato. Come esempio pratico consideriamo un solenoide indefinito nel quale circola una corrente i che genera un campo magnetico su cui applichiamo la circuitazione lungo un percorso chiuso di altezza h che racchiude n spire $\oint \vec{B}_o ds = B_o h = \mu_o n h i$ si ricava $B_o = \mu_o n i$. Ora, allo stesso modo della suscettività elettrica, prenderemo in considerazione la suscettività magnetica come $\chi_m = k_m - 1$, eguale a zero nel vuoto. Siccome adesso

$$B = k_m B_o = (1 + \chi_m) B_o = \mu_o n i + \mu_o \chi_m n i$$

viene facile figurare in che modo il campo viene alterato dal contributo del mezzo magnetizzato. Il valore della corrente presente nel contributo $\mu_o \chi_m n i$ è associabile alle correnti amperiane, ovvero microcorrenti di elettroni presenti nel materiale magnetizzato. Sperimentalmente per i materiali diamagnetici si è trovato che $\chi_m < 0$ ed anche $|\chi_m| \ll 1$, mentre nei paramagnetici, seppur vale sempre $\chi_m \ll 1$ è però $\chi_m > 0$, infine per i ferromagnetici si ha $\chi_m \gg 1$. La prima ipotesi che possiamo fare è che nei diamagneti, a causa di particolari simmetrie molecolari, risulti assente un momento magnetico intrinseco, fenomeno che invece è presente nei paramagneti e nei ferromagneti (*domini di Weiss*). Se così non fosse dovremmo ammettere che, essendo la magnetizzazione inversamente proporzionale all'agitazione termica e dunque alla temperatura, i diamagneti, a temperature molto più basse del normale, si comportino almeno come i paramagneti. Siccome questa supposizione è stata confutata sperimentalmente si è arrivati ad escludere l'esistenza di momenti magnetici intrinseci nei diamagneti, poiché in ogni caso è sempre $\chi_m < 0$.

Entro i limiti concettuali della meccanica classica, ci proponiamo ora di analizzare a livello atomico le cause dei fenomeni di magnetizzazione. Le seguenti approssimazioni risultano quantomeno soddisfacenti nei casi dei diamagneti e dei paramagneti, per i ferromagneti la trattazione richiede un approfondimento dal punto di vista della meccanica quantistica.

Iniziamo col considerare un elettrone in orbita attorno al proprio nucleo, esso è costretto ad orbitare per via dell'interazione coulombiana con la carica positiva. Ora, poiché la forza elettrica oltre ad essere conservativa è anche una forza centrale, il momento delle forze risulta nullo in quanto il raggio dell'orbita e la forza sono entrambi radiali (forza centripeta), e quindi paralleli. Se \mathcal{F} è il momento delle forze possiamo scrivere

$$\mathcal{F} = \frac{dL}{dt} = 0$$

e dunque

$$L = \text{costante}$$

se \mathbf{L} è il momento angolare dell'elettrone, che vale

$$L = m_e v r = m_e r^2 \omega = m_e r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Definiamo l'area spazzata dal raggio vettore nell'unità di tempo $\frac{dA}{dt}$ approssimandola all'area di un triangolo con base $r d\theta$ e altezza r tale che sia $A = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ e dunque definiamo la velocità areale

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

che dovrà essere per forza costante poiché abbiamo dedotto che $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante}$. Notiamo in particolare che

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m_e}$$

Se l'orbita è chiusa possiamo trascurare la forma differenziale e dunque $\frac{A}{T} = \frac{L}{2m_e} = \text{costante}$ dalla quale deduciamo il periodo

$$T = \frac{2m_e A}{L} = \frac{2m_e \pi r^2}{m_e v r} = \frac{2\pi r}{v}$$

dal momento che possiamo considerare un'orbita circolare. Durante questo periodo l'elettrone avrà prodotto una corrente i opposta al suo moto. Dalla definizione di intensità di corrente

$$i = -\frac{e}{T} = -\frac{e v}{2\pi r}$$

per il principio di equivalenza di Ampere dovrà venirsi a creare un momento magnetico $\vec{m} = i A$ in seguito alla corrente prodotta

$$\vec{m} = i \pi r^2 = -\frac{e v}{2} r$$

ortogonale al piano dell'orbita, così come il momento angolare, ma con verso opposto. Possiamo esplicitare la relazione tra \mathbf{m} ed \mathbf{L}

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

valida in generale nel caso del nostro elettrone, mentre nel caso di Z elettroni converrà considerare il momento angolare totale \mathcal{L} , dunque

$$\vec{m} = -\Phi \frac{e}{2m_e} \mathcal{L}$$

dove Φ è detto *rapporto giromagnetico*.

Tuttavia il momento magnetico orbitale non è l'unica causa dei fenomeni di magnetizzazione. Se ammettiamo l'esistenza di un momento angolare intrinseco degli elettroni, così come il momento angolare orbitale genera il momento magnetico \mathbf{m} , anche questo dovrà produrre un momento

magnetico $\mathcal{U}_B = -\frac{e}{m_e} S$ dove $|S| = \frac{1}{2} \hbar$ è lo spin dell'elettrone. Poiché \mathcal{U}_B racchiude praticamente solo costanti, esso prende un preciso valore numerico (se consideriamo un elettrone), detto *magnetone di Bohr*. A rigore possiamo trascurare gli spin dei nucleoni, poiché questi producono un momento magnetico trascurabile rispetto al magnetone di Bohr (*magnetoni nucleari*). I possibili valori del momento angolare e quindi del momento magnetico sono soggetti alle leggi di Pauli. Di conseguenza per ragioni di simmetria tra orbitali elettronici, nella maggior parte delle sostanze, il momento magnetico intrinseco ha poca rilevanza (somma tra momento magnetico angolare e momento magnetico derivante dagli spin) poiché in generale \mathcal{U}_B e \mathbf{m} sono opposti e si elidono. Sono poche quindi le sostanze che dispongono di una magnetizzazione intrinseca, e deduciamo che ciò sia dovuto alla particolarissima configurazione degli orbitali elettronici, secondo la teoria quantistica. Dopo queste prime considerazioni, analizziamo il caso delle sostanze diamagnetiche. Abbiamo accennato che nei diamagneti si può trascurare il momento magnetico intrinseco per ragioni di simmetrie orbitali, dunque consideriamo solamente il momento magnetico angolare derivante all'orbita dell'elettrone. Se investiamo la sostanza con un campo magnetico \mathbf{B} , agirà il momento meccanico

$$\mathcal{F} = \vec{m} \times \vec{B}_{loc} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \times \vec{B}_{loc} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}_{loc} \times \vec{L}$$

e poiché $\mathcal{F} = \frac{dL}{dt}$ si avrà una variazione del momento angolare. Il momento \mathcal{F} farà compiere al vettore \mathbf{L} un moto di precessione attorno alla direzione del campo magnetico \mathbf{B} . Questo moto avrà velocità angolare

$$\omega_L = \frac{e}{2m_e} B_{loc}$$

L'assunzione è valida solo nei casi in cui $\omega_L \ll \omega$ se ω è la velocità angolare del moto di rivoluzione dell'elettrone. In sostanza dovrà valere

$$\frac{e}{2m_e} B_{loc} \ll \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi r} v \rightarrow B_{loc} \ll \frac{2m_e v}{r e} = 4.7 \cdot 10^5 T$$

si noti che \vec{B}_{loc} rappresenta il campo magnetico locale, in un volume infinitesimo. Non abbiamo motivo di credere nell'esistenza di campi magnetici tanto elevati a livello atomico, se così non fosse avremmo da preoccuparcene, pertanto possiamo ritenere valida l'assunzione iniziale. Il moto descritto è detto *precessione di Larmor* e si completa in un periodo $T_L = 2\pi/\omega_L$ durante il quale è prodotta la corrente

$$i_L = -\frac{e}{T_L} = -\frac{e}{2\pi} \omega_L = -\frac{e^2}{4\pi m_e} B_{loc}$$

seppure questa sia trascurabile in quanto assume valori molto modesti se comparata alla corrente prodotta dal moto di rivoluzione, considerato l'insieme degli elettroni gli effetti si sovrappongono e il risultato diventa significativo. Verrebbe naturale ora associare questa corrente ad un momento magnetico \mathbf{m} dal principio di equivalenza di Ampere, tuttavia ora il moto non si compie più sullo stesso piano dell'orbita prima considerato, dal momento che ora gli elettroni descrivono una precessione. Consideriamo dunque la proiezione del raggio dell'orbita di precessione sul piano dell'orbita iniziale e denominiamolo r . Vettorialmente, se assumiamo che \vec{B}_{loc} abbia direzione sull'asse z , possiamo scrivere $r^2 = x^2 + y^2 = \frac{2}{3} r_i^2$ dove denominiamo r_i raggio medio dell'orbita

se assumiamo per l'atomo una certa simmetria sferica tale che $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{r_i^2}{3}$. Il momento magnetico sarà dunque

$$\vec{m} = i \pi r^2 = -\frac{e^2 \vec{B}_{loc}}{4 m_e} r^2 = -\frac{e^2 r_i^2}{6 m_e} \vec{B}_{loc}$$

sommando i contributi di Z elettroni

$$\vec{m}_Z = \sum_1^Z \vec{m} = -\frac{e^2}{6 m_e} \left(\sum_1^Z r_i^2 \right) \vec{B}_{loc}$$

Se ora definiamo il raggio quadratico medio dell'atomo come somma di tutti i raggi medi delle orbite dei vari elettroni che compiono i moti di precessione come

$$\overline{r^2} = \frac{1}{Z} \sum_1^Z r_i^2$$

possiamo dare al momento magnetico totale una veste più generale

$$\vec{m}_z = -\frac{e^2 Z \overline{r^2}}{6 m_e} \vec{B}_{loc}$$

Avendo in precedenza definito la magnetizzazione come momento magnetico per unità di volume, possiamo scrivere

$$\vec{M} = n \vec{m}_z = -\frac{e^2 n Z \overline{r^2}}{6 m_e} \vec{B}_{loc}$$

dove n è il numero di atomi per unità di volume. Resta ora da definire quale sia l'espressione del campo magnetico locale. Occorre definire il valore del campo magnetico in una regione sferica contenente n atomi utilizzando il campo magnetizzato \vec{H} definito come

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

e la relazione tra campo magnetizzato e vettore magnetizzazione $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ tale da poter scrivere

$$\vec{B}_{loc} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

Siccome nei materiali diamagnetici è dimostrato che $|\chi_m| \ll 1$, vale l'approssimazione

$$\vec{B}_{loc} \approx \mu_0 \vec{H}$$

possiamo riscrivere il momento magnetico

$$\vec{m}_z = -\frac{e^2 Z \overline{r^2}}{6 m_e} \mu_0 \vec{H}$$

e dunque la magnetizzazione

$$\vec{M} = -\frac{e^2 n Z \overline{r^2}}{6 m_e} \mu_0 \vec{H}$$

Poiché sussiste la relazione $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ valida per le sostanze isotrope, dovrà essere

$$-\frac{e^2 n Z \overline{r^2}}{6 m_e} \mu_0 \vec{H} = \chi_m \vec{H}$$

pertanto si ricava il valore della suscettività magnetica in termini microscopici

$$\chi_m = -n \mu_0 \frac{e^2 Z \overline{r^2}}{6 m_e}$$

Il risultato giustifica le osservazioni sperimentali secondo le quali $\chi_m < 0$. A causa di determinate asimmetrie degli orbitali elettronici, l'applicazione di un campo magnetico produrrà, tramite le precessioni orbitali, dei momenti magnetici che presi coralmemente si oppongono agli effetti del campo e dunque ne sono respinti.

Bisogna ammettere che, tralasciate le considerazioni concettuali, l'accordo sperimentale non è dei migliori.

Tenteremo ora un'approccio alternativo al problema. L'elettrone, investito dal campo magnetico, dovrebbe subire la forza di Lorentz

$$\vec{F} = -e \vec{E} = -e \vec{v} \times \vec{B}$$

dunque il suo moto nella regione investita da \mathbf{B} dovrebbe produrre un campo elettrico non conservativo

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

tale che la circuitazione sia diversa da zero e corrisponda alla forza elettromotrice

$$\mathcal{E}_V = \oint \vec{E} \cdot ds = E 2 \pi R$$

poiché come circuitazione stiamo considerando l'orbita dell'elettrone. Per la legge di Faraday-Lentz

$$\mathcal{E}_V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

dove $\Phi(\vec{B})$ è il flusso del campo magnetico $\Phi(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot u_N d\Sigma$ attraverso la superficie Σ .

Dimostriamo anzitutto che la variazione di flusso magnetico descrive lo stesso fenomeno della circuitazione del campo elettrico prodotto dall'elettrone proprio nella regione di \mathbf{B} . Siccome deve

essere $v = \frac{dr}{dt}$, avremo

$$\mathcal{E}_V = \oint \frac{d\vec{r}}{dt} \times \mathbf{B} \cdot ds$$

e cioè operando sul prodotto misto

$$\mathcal{E}_v = \int_C ds \times \frac{dr}{dt} \vec{B} = \frac{d}{dt} \int_C \vec{B} d\Sigma$$

$ds \times dr = d\Sigma$ è l'area del parallelogramma infinitesimo orientato rispetto al piano dell'orbita. Il flusso in questa regione si scrive $\Phi_t(\vec{B}) = \int_{\Sigma} d\Phi' = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_N d\Sigma$. La variazione di questo flusso attraverso la superficie dovrà annullarsi con la variazione della quantità di flusso entrante, dal momento che \mathbf{B} è un campo solenoidale $\Phi_2(\vec{B}) - \Phi_1(\vec{B}) + d\Phi_t = 0$ in modo tale che la variazione totale del flusso sia $d\Phi = \Phi_2(\vec{B}) - \Phi_1(\vec{B}) = -d\Phi_t$.

$$\mathcal{E}_v = \int_C \vec{E} \cdot ds = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{-d\Phi_t}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_N d\Sigma$$

e tornando al caso dell'elettrone sarà

$$\mathcal{E}_v = E 2\pi R = -\frac{dB}{dt} \Sigma$$

ovvero

$$E 2\pi R = -\frac{dB}{dt} \pi R^2$$

pertanto

$$E = -\frac{R}{2} \frac{dB}{dt}$$

Poiché l'elettrone orbitava inizialmente per via della forza di Coulomb, la forza di Lorentz, perpendicolare alla velocità dell'elettrone, perturba l'orbita secondo l'equazione del moto $F = eE$

$$m_e \frac{dv}{dt} = -\frac{eR}{2} \frac{dB}{dt}$$

se si va dunque a variare il campo magnetico da zero a B , la corrispondente variazione di velocità diventa

$$\delta v = -\frac{eR}{2} \frac{B}{m_e}$$

Ora, dal momento che $v = \omega R$, la variazione della velocità angolare sarà

$$\delta \omega = -\frac{eB}{2m_e}$$

Ritroviamo dunque la precessione di Larmor, con la differenza ora che l'elettrone viene rallentato poiché avendo investito il materiale con il campo \mathbf{B} si è prodotta una variazione del flusso magnetico (prima assente) che genera una corrente che si oppone alla variazione stessa, per la *legge di Lenz*. Dunque se definiamo il momento magnetico come $\vec{m} = i\pi R^2$ dove la corrente è data da

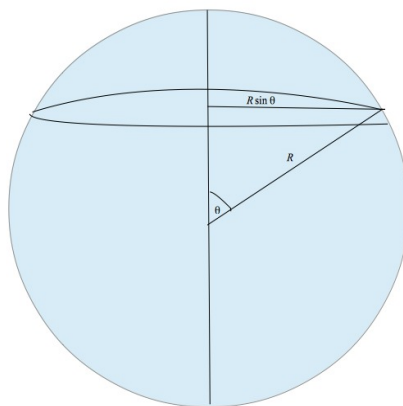
$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi} \delta\omega = -\frac{e^2 B}{4\pi m_e}$$

ora positiva in quanto si oppone alla variazione del flusso del campo \mathbf{B}
il momento magnetico sarà $\vec{m} = i\pi R^2$

$$\vec{m} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \vec{B}$$

ritrovando così il medesimo risultato dell'approccio precedente. In particolare valgono tutte le considerazioni fatte in precedenza circa la particolare simmetria del problema come possibile spiegazione del fenomeno. Il diamagnetismo può essere rilevato nei cristalli ionici o in generale nelle sostanze che presentano il completamento degli orbitali elettronici. Volendo ora passare alla trattazione dei fenomeni di *paramagnetismo* sarà necessario fare delle considerazioni. Mettiamo infatti da parte gli argomenti discussi nel caso del diamagnetismo ed assumiamo che le sostanze paramagnetiche dispongano di un momento magnetico intrinseco delle molecole. Il materiale tuttavia non risulta magnetizzato, poiché i momenti molecolari sono disposti casualmente e sono ostacolati dall'agitazione termica. Questo momento magnetico intrinseco deriva dall'unione del momento magnetico orbitale studiato in precedenza e dai magnetoni generati dagli spin. Si noti che i fenomeni presenti nel diamagnetismo sono presenti anche qui, ma con minore rilevanza tali da essere trascurabili. Una volta investiti dal campo magnetico \mathbf{B} , questi momenti tenderanno ad allinearsi coralmemente e l'effetto si manifesterà macroscopicamente. L'effetto ricorda chiaramente quello della polarizzazione, dove le molecole del dielettrico dispongono di momenti di dipolo intrinseci, e una volta investite da un campo \mathbf{E} si orientano provocando una polarizzazione macroscopica. Ovviamente questo orientamento sarà ostacolato dall'agitazione termica e dunque dalla temperatura, sarà dunque improbabile rilevare un allineamento nei casi di elevata temperatura. La probabilità infatti che un insieme di molecole si orienti secondo le linee del campo \mathbf{B} per via del momento meccanico $\mathcal{F} = \vec{m} \times \vec{B}$ sarà data da una distribuzione di Boltzmann del tipo

$dn_\theta \propto e^{-\frac{U_b}{k_B T}} dA$ dove U_b è l'energia potenziale dei momenti magnetici, k_B la costante di Boltzmann e dA la regione di distribuzione. Il formalismo matematico è in effetti lo stesso utilizzato per spiegare la polarizzazione per orientamento. Se assumiamo una certa simmetria sferica per quanto riguarda lo spazio di movimento delle molecole, per la regione di distribuzione consideriamo una sfera



così da poter scrivere $dA = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$. Lo spazio a disposizione di ogni molecola per l'orientamento sarà quindi dato da questa regione. Ipotizziamo che l'orientamento sia espresso da una funzione del tipo

$$M_{\theta} = \int_0^{\pi} m \cos \theta dn_{\theta}$$

che fisicamente dovrebbe descrivere la magnetizzazione (momento magnetico per unità di volume) in funzione dell'orientamento delle molecole (la funzione goniometrica) parallelo od opposto alle linee del campo $[0; \pi]$ il che dipenderà dalla funzione della probabilità dn_{θ} che le molecole si orientino secondo la distribuzione di Boltzmann. Assumiamo che esista una costante C caratteristica del problema per la quale è vero che

$$dn_{\theta} = C \exp\left(-\frac{U_b}{k_B T}\right) dA$$

L'impalcatura matematica utilizzata finora sembra suggerire di trattare anche l'energia potenziale di orientazione delle molecole allo stesso modo del caso di un dipolo elettrico

$U_b = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m B \cos \theta$ Il significato fisico è tuttavia molto diverso, dal momento che il campo elettrico ed il campo magnetico sono sostanzialmente diversi a partire dalla struttura delle loro linee di campo. Detto ciò, scriveremo

$$dn_{\theta} = C \exp\left(\frac{m B \cos \theta}{k_B T}\right) dA$$

integriamo lungo l'angolo piatto

$$n = C 2 \pi R^2 \int_0^{\pi} \exp\left(\frac{m B \cos \theta}{k_B T}\right) \sin \theta d \theta$$

riconosciamo il numero n di molecole orientate nell'unità di volume e ricaviamo l'espressione della costante C

$$C = \frac{n}{2 \pi R^2 \int_0^{\pi} \exp\left(\frac{m B \cos \theta}{k_B T}\right) \sin \theta d \theta}$$

Così facendo possiamo riscrivere la funzione di distribuzione dn_{θ}

$$dn_{\theta} = \frac{n \exp\left(\frac{m B \cos \theta}{k_B T}\right) 2 \pi R^2 \sin \theta d \theta}{2 \pi R^2 \int_0^{\pi} \exp\left(\frac{m B \cos \theta}{k_B T}\right) \sin \theta d \theta}$$

in modo tale da poter dare veste alla funzione della magnetizzazione

$$M_{\theta} = \frac{\int_0^{\pi} m n \exp\left(\frac{m B \cos \theta}{k_B T}\right) \cos \theta \sin \theta d \theta}{\int_0^{\pi} \exp\left(\frac{m B \cos \theta}{k_B T}\right) \sin \theta d \theta}$$

se ora scriviamo $a = \frac{m B}{k_B T}$

$$M_{\theta} = \frac{\int_0^{\pi} m n \exp(a \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \exp(a \cos \theta) \sin \theta d\theta}$$

basterà porre $y = \cos \theta$ così che $\frac{dy}{d\theta} = -\sin \theta$ e dunque $d\theta = \frac{dy}{-\sin \theta}$ e l'integrale diviene

$$M_{\theta} = \frac{\int_0^{\pi} m n \exp(a y) y \sin \theta \frac{dy}{-\sin \theta}}{\int_0^{\pi} \exp(a y) \sin \theta \frac{dy}{-\sin \theta}}$$

Operando le dovute semplificazioni e sostituendo i limiti di integrazione in virtù della nuova variabile (essendo $\theta_2 = \arccos y = \pi$ e $\theta_1 = \arccos y = 0$ integreremo nell'intervallo $-1 \leq y \leq 1$)

$$M_{\theta} = \frac{m n \int_{-1}^1 \exp(a y) y dy}{\int_{-1}^1 \exp(a y) dy}$$

dal momento che a è una costante, l'integrale al denominatore è immediato, quella funzione tale che la sua derivata corrisponda a $\exp(a y)$ dovrà per forza essere $\frac{1}{a} \exp(a y)$ in quanto si

applica la regola di derivazione di funzioni composte $\frac{d}{dy} \exp(k g(y)) = \exp(k g(y)) k \frac{d}{dy} g(y)$.

Per quanto riguarda l'integrale al numeratore si praticano le seguenti sostituzioni $y = u$,

$dv = \exp(a y) dy$ cosicché $du = dy$ e $v = \frac{1}{a} \exp(a y)$ e si applica l'integrazione per parti

$$I = \frac{y}{a} \exp(a y) - \int \frac{1}{a} \exp(a y) dy = \frac{y}{a} \exp(a y) - \frac{1}{a^2} \exp(a y)$$

Numericamente avremo

$$M_{\theta} = \frac{n m \left[\frac{(1)}{a} e^{a(1)} - \frac{1}{a^2} e^{(1)a} \right] - \left[\frac{(-1)}{a} e^{(-1)a} - \frac{1}{a^2} e^{(-1)a} \right]}{\frac{1}{a} [e^a - e^{-a}]}$$

e dunque la magnetizzazione sarà descritta dalla *funzione di Langevin*, così come nel caso della polarizzazione per orientamento

$$M_{\theta} = m n \left(\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right) = m n \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) = m n L(a)$$

A rigore occorre approssimare la funzione di Langevin, poiché, essendo $a = \frac{m B}{k_B T}$, per temperature elevate assume valori trascurabili. Il significato fisico della funzione di Langevin sta

nel rapporto $L(a) = \frac{M}{M_{sat}}$ dove $M_{sat} = mn$ corrisponde alla *magnetizzazione di saturazione*,
ossia quando tutti gli n momenti magnetici nell'unità di volume sono orientati secondo le linee di \mathbf{B} .
Sviluppiamo in serie la funzione iperbolica

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}$$

dove B_n sono i numeri di Bernoulli $\left\{ B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30} \dots \right\}$. Arrestando lo sviluppo al primo termine avremo

$$\coth a = \frac{1}{a} + \frac{a}{3}$$

ossia

$$M = mn \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{3} - \frac{1}{a} \right) = mn \left(\frac{a}{3} \right)$$

tornando al significato fisico, troviamo

$$\vec{M} = mn \frac{m \vec{B}}{3 k_B T} = \frac{n m^2}{3 k_B T} \vec{B}$$

D'altra parte, se assumiamo ancora una certa simmetria sferica, il valore del campo magnetico si scrive

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \frac{\vec{M}}{3} \right)$$

dunque

$$\vec{M} = \frac{n m^2}{3 k_B T} \mu_0 \left(\vec{H} + \frac{\vec{M}}{3} \right)$$

da questa espressione ricaviamo la magnetizzazione

$$\vec{M} = \frac{\frac{n m^2}{3 k_B T}}{1 - \frac{1}{3} \frac{n m^2}{3 k_B T}} \vec{H}$$

Rammentando la relazione che intercorre tra il vettore magnetizzazione ed il vettore campo magnetizzato $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, siamo portati a pensare che debba essere

$$\chi_m = \frac{\frac{n m^2}{3 k_B T}}{1 - \frac{1}{3} \frac{n m^2}{3 k_B T}}$$

Potremo ora porre $C\rho = \frac{nm^2}{3k_B T}$ dove C è nota come *costante di Curie*, ρ è la densità del materiale; ponendo anche $T_0 = \frac{1}{3}C\rho = \frac{1}{3} \frac{nm^2}{3k_B T}$ ritroviamo la *seconda legge di Curie*:

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_0}$$

che descrive la suscettività magnetica anche nei materiali paramagnetici, che abbiamo detto essere $\chi_m \ll 1$ e $\chi_m > 0$. La seconda legge di Curie è valida in generale per le sostanze ferromagnetiche, tuttavia si ricava abilmente che per i paramagneti a temperature ordinarie

$T_0 = \frac{1}{3}C\rho = \frac{nm^2}{9k_B T} \approx 0$ e dunque si ha la *prima legge di Curie*

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T}$$

relazione a cui obbediscono la maggior parte delle sostanze paramagnetiche. Si noti che non si è considerata l'interazione tra le molecole come possibile ostacolo per l'orientamento.

Matteo Parriciatu

