Eserciziario di Fisica

Matteo Parriciatu

Problema 1

In uno spettrometro di Dempster dei fasci collimati di ioni con carica $q = 10^{-18}\,C$ attraversano un selettore di velocitá costituito da due piastre metalliche indefinite tra le quali esiste un campo elettrico E ed un campo magnetico $B_o = 0.4\,T$ entrambi ortogonali alla traiettoria degli ioni che si muovono ad una velocitá costante. Una volta superato il selettore, gli ioni si dirigono verso il foro di un'altra regione nella quale é presente un'altro campo magnetico $B = 4\,T$ ortogonale alla traiettoria. Quindi si depositano su di una lastra ad una distanza *2r* dal foro di ingresso. Si considerino due ioni dei quali uno é l'isotopo dell'altro, che si depositano ad una distanza $d = 4\,cm$ l'uno dall'altro sulla lastra a partire dal centro della traiettoria a semicirconferenza. Il rapporto tra i raggi di curvatura é pari a $\frac{r_2}{r_1} = 1.86$. Sapendo che il peso atomico dello ione corrisponde a $6.941\,u$, si determini la massa del suo isotopo e il valore della densitá superficiale di carica σ che genera il campo elettrico nel selettore.

Problema 2

Si consideri una particella di carica $q_1 = -10^{-9}\,C$ e massa m provvista di una certa energia cinetica E_k, che arriva dall'infinito in una regione in cui esiste un campo elettrico generato da una carica $q_2 = 10^{-4}\,C$ fissa. Ad una distanza $r = 3\,um$ dalla carica generatrice del campo, la particella é costretta a curvare la sua traiettoria. Stimare la massa della particella se, dopo aver perso energia per irradiamento, finisce per cadere verso la carica q_2 dopo un tempo $\tau = 2.2\,us$ dall'inizio dell'interazione.

Problema 3

Un corpo di massa $m = 10^{-3}\,kg$ e carica $Q = 10^{-5}\,C$, viene immerso con velocitá nulla all'istante $t = 0\,s$ in un liquido in cui é presente un campo elettrico uniforme $\mathbf{E} = 10^2\,N/C\,(-\mathbf{u}_y)$. Assumendo che sul corpo agisca una forza di attrito viscoso $F_v = -m\,k\,v$ dove k é una costante di smorzamento con le dimensioni di una frequenza ed é pari a $1/12\,s^{-1}$, trovare per quale istante t la velocitá del corpo assume il valore $v = 7\sqrt{2}\,m/s$ e a che distanza si trova in questo istante rispetto alla posizione di partenza. Si trascurino gli effetti del campo gravitazionale.

Problema 4

Siano date due cariche uguali di segno opposto $|q| = 10^{-6}\, C$ poste ad una distanza $l = 2\, cm$ l'una dall'altra ed investite da un campo elettrico uniforme $E = 2.9 \times 10^5\, N/C$. In un istante generico le due cariche, fissate a terra tramite l'asse ortogonale alla loro congiungente, sono orientate secondo le linee del campo, in una situazione di minima energia potenziale. Supponendo di spostare l'orientamento delle cariche di un angolo molto piccolo rispetto alla posizione di equilibrio in modo tale da generare un'oscillazione attorno all'asse delle cariche, si calcoli il momento di inerzia del sistema rispetto a quest'ultimo, se in un intervallo di tempo di 30 secondi si registrano 20 oscillazioni.

Problema 5

Un filo di sezione $\Sigma = 10\, cm^2$, percorso da una corrente di densitá $j = 1.3 \times 10^4\, A/m^2$ é caratterizzato da una resistenza $R = 4\sqrt{5}\,\Omega$ utilizzata per riscaldare 0.5 moli di idrogeno in una trasformazione isobara durante la quale l'entropia del gas aumenta di una quantitá $\Delta S = 5.6\, J/K$ in un tempo $t = 1.6\, s$ dall'inizio del processo. Trattandolo come gas ideale, si stimi la temperatura finale dell'idrogeno e il volume iniziale occupato se $V_f = V_i + \delta_k$ dove $\delta_k = 10^{-\pi}\, m^3$. Si assuma che non vi siano dispersioni di calore.

Problema 6

Un disco di raggio $R = 40\, cm$ carico con densitá $\rho = 10^{-3}\, C/m^2$ ruota attorno al proprio asse x ad una frequenza di 250 giri al secondo. Calcolare il campo magnetico sull'asse del disco nelle sue immediate vicinanze e si dimostri che per distanze $x >> R$ il campo $B(x)$ é approssimativamente una funzione lineare di x. Si dimostri inoltre che un magnete caratterizzato da un momento magnetico $\mathbf{m}$ parallelo al campo magnetico e posto a grande distanza dal centro del disco risente di una forza approssimabile a $\mathbf{F} = -2m\, \mathbf{u}_x$.

Problema 7

Si consideri un corpo dielettrico ($m = 10^{-3}\, kg$) di forma indefinita caratterizzato da un momento di dipolo $\mathbf{p} = 10^{-7}\mathbf{u}_r\, Cm$, investito dal campo elettrico generato da una distribuzione di carica all'interno di due gusci cilindrici indefiniti coassiali di densitá $\sigma = 4.2 \times 10^{-4}\, C/m^3$ con raggio esterno $R_2 = 6\, cm$ e raggio interno $R_1 = 3\, cm$ posizionati ad una distanza r. Determinare l'espressione della funzione che descrive la velocitá $v(r)$ del corpo supponendo che arrivi dall'infinito con $v_i = 0$ fino ad una distanza r dalla sorgente. Calcolare dunque $v(22\, cm)$.

Soluzioni

Soluzione problema 1

L'equilibrio tra le forze all'interno del selettore é il motivo per cui gli ioni si muovono a velocitá costante durante l'attraversamento. All'equilibrio é infatti $F = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_o) = 0$ e dunque in modulo $v = \frac{E}{B_o} = \frac{\sigma}{\epsilon_o B_o}$. Nella regione successiva provvista di campo magnetico, il raggio di curvatura della forza di Lorentz vale $r = \frac{mv}{qB} = \frac{m\sigma}{q\epsilon_o B B_o}$ ed é direttamente proporzionale alla massa della particella. Il rapporto tra i raggi di curvatura si riduce quindi a $\frac{r_2}{r_1} = \frac{m_2}{m_1} = 1.86$ pertanto $m_2 = 1.86 m_1 = 1.86(6.941)m_u = 2.14 \times 10^{-26}\,kg$ dove m_u é l'unitá di massa atomica. Dunque si ha $r_2 - r_1 = \frac{m_2\sigma}{q\epsilon_o B B_o} - \frac{m_1\sigma}{q\epsilon_o B B_o} = 0.04\,m$ e quindi $\sigma = 5.71 \times 10^{-5}\,C/m^2$

Soluzione problema 2

Assumendo che sia nulla l'energia potenziale della carica all'infinito, l'energia di legame tra particella e carica generatrice é data dal principio di conservazione dell'energia meccanica $U_m = E_k + U_e$ dove U_e é l'energia potenziale della particella una volta nel campo della carica q_2 pari a $U_e = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o r}$. All'interno del campo la particella é sottoposta alla forza centripeta $F_c = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o r^2} = \frac{mv^2}{r}$ dunque poiché é $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o r}$ l'energia di legame si scrive $U_m = -\frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_o r}$ necessariamente minore di zero in quanto l'orbita é chiusa. Sottoposta all'accelerazione centripeta, la particella irradierá un energia pari all'energia di legame $\Delta U_m = P_L \tau$ dove $P_L = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_o c^3}$ é la formula di Larmor e corrisponde alla potenza irradiata da una particella carica in moto accelerato. Pertanto $\frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_o r} = \frac{q_1^2 a^2}{6\pi\epsilon_o c^3}\tau$ dalla quale si ricava $a_c = \sqrt{\frac{3q_2 c^3}{4q_1 \tau r}}$. Dunque dalla legge del moto si ricava $m = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o r^2}\sqrt{\frac{4q_1 \tau r}{3q_2 c^3}}$ ossia $m = 1.80 \times 10^{-13}\,kg$

Soluzione problema 3

Si orienti l'asse delle ordinate verso il basso per comoditá concettuale e si scriva la legge del moto $m\frac{dv}{dt} = QE - mkv$, equazione differenziale che risolviamo per separazione di variabili

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{QE}{m} - kv} = \int_0^t dt$$

e dunque $-\frac{1}{k}[\ln(\frac{QE}{m} - kv) - \ln(\frac{QE}{m})] = t$ da cui otteniamo la funzione che descrive l'andamento della velocitá

$$v(t) = \frac{QE}{mk}(1 - e^{-kt})$$

Il corpo raggiunge la velocitá di $7\sqrt{2}\,m/s$ nell'istante $t = -12\ln[\frac{12-7\sqrt{2}}{12}] = 20.9\,s$. Integrando la funzione per la velocitá si ottiene la legge oraria

$$y(t) = \int_0^t v(t)dt = \frac{QE}{mk}[\int_0^t (1 - e^{-kt})dt] = \frac{QE}{mk}[t - \int_0^t e^{-kt}dt]$$

ovvero

$$y(t) = \frac{QE}{mk}t + \frac{QE}{mk^2}e^{-kt} - \frac{QE}{mk^2}$$

per cui si evince facilmente che $y(20.9\,s) = 132\,m$

Soluzione problema 4

Il sistema delle due cariche costituisce un momento di dipolo $\mathbf{p} = \mathbf{l}q$, sul quale agisce il momento meccanico $\mathbf{M} = -\mathbf{p} \times \mathbf{E} = -pE\sin\theta$. La legge del moto si scrive $I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -pE\sin\theta$. Dalla quale confondendo il valore del seno di un angolo molto piccolo con l'angolo stesso, avremo l'equazione differenziale di un moto armonico

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{I}\theta = 0$$

con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{pE}{I}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ se f é la frequenza di oscillazione pari a $f = \frac{2}{3}\,Hz$. Calcolando il campo elettrico ad una distanza $r = 22\,cm$ si ricava $I = 3.32 \times 10^{-4}\,kg\,m^2$

Soluzione problema 5

Il calore assorbito per effetto Joule corrisponde a $Q = Ri^2t$ dove $i = j\Sigma = 13\,A$. Il primo principio della termodinamica per una isobara si scrive $nc_v\Delta T + P\Delta V = Ri^2t$ dove $P\Delta V = nR\Delta T$, in base alla relazione di Meyer si ha $n(c_v + R)\Delta T = nc_p\Delta T$. Per un gas biatomico é $c_p = \frac{7}{2}R$, dunque si ha

$$nc_p(T_f - T_i) = Ri^2t \tag{1}$$

Dalla definizione di entropia $dS = \frac{dQ}{T}$ dove per una isobara vale $dQ = pdV + nc_vdT = \frac{nRT}{V}dV + nc_vdT$ dunque integrando si ha

$$\Delta S = nc_v \ln\frac{T_f}{T_i} + nR\ln\frac{V_f}{V_i}$$

dal momento che deve essere

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{T_f}{T_i} \tag{2}$$

in base alla relazione di Meyer si ricava ancora

$$\Delta S = nc_p \ln\frac{T_f}{T_i} = 5.6\,J/K$$

Facendo sistema con la (1) si ricava $T_i = 354K$ e pertanto $T_f = 520.35K$. Dalla relazione (2) si ricava $V_i = 1.53 \times 10^{-3}\,m^3$ e $V_f = 2.25 \times 10^{-3}\,m^3$

Soluzione problema 6

Si consideri il campo infinitesimo $d\mathbf{B} = \frac{\mu_o di}{4\pi}\frac{d\mathbf{s}\times\mathbf{u}_r}{R^2}\mathbf{u}_x$ generato dalla corrente $di = \frac{dq}{T}$ prodotta in un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ dalla carica contenuta in un anello infinitesimo $dq = \rho 2\pi r dr$. Poiché inoltre $d\mathbf{s} \times \mathbf{u}_r = ds\sin\theta = 2\pi r\sin\theta$ dove θ

é l'angolo formato con l'asse x, si ha per definizione $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$ arrivando a $dB = \frac{\mu_o\omega\rho}{2}\frac{r^3\,dr}{(r^2+x^2)^{3/2}}$ che si integra per $0 < r < R$ ottenendo

$$B(x) = \frac{\mu_o\omega\rho}{2}\left[\frac{2x^2+R^2}{\sqrt{x^2+R^2}}\right] - 2x$$

Per $x << R$ si ha $B = \frac{\mu_o\omega\rho R}{2} = 3.95 \times 10^{-7}\,T$, mentre per $x >> R$ si puó approssimare $B = 2x(\frac{\mu_o\omega\rho}{2} - 1)$ con evidenza numerica si puó scrivere la funzione lineare $B(x) = -2x$. D'altra parte sul magnete agisce la forza $F = m\frac{dB}{dx}$ ossá

$$F(x) = \frac{\mu_o m\omega\rho}{2}\left[\frac{4x}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{(2x^2+R^2)x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\right] - 2\,m$$

che approssimata a grandi distanze porta proprio a $F = m(\mu_o\omega\rho - 2) \approx -2m$ Si noti che si poteva pervenire al medesimo risultato considerando la funzione lineare trovata $B(x) = -2x$.

Soluzione problema 7

All'interno del cilindro é contenuta una carica $Q = \sigma\pi(R_2^2 - R_1^2)h$. Come superficie gaussiana consideriamo una superficie cilindrica $\Sigma = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h) \approx 2\pi rh$ dal momento che $h >> r$. Applicando il teorema di Gauss il campo generato corrisponde dunque a

$$E(r) = \frac{\sigma(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_o r}$$

La forza su di un dipolo con momento di dipolo parallelo alle linee di campo é $F = p\frac{dE}{dr}$ ossía

$$F = -\frac{p\sigma(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_o r^2}$$

La legge del moto si scrive dunque $ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}$ in quanto v é funzione composta di r. Si noti che $\frac{dr}{dt} = v$ dunque si scrive l'equazione differenziale del moto

$$m\frac{dv}{dr}v = -\frac{p\sigma(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_o r^2}$$

che si integra per separazioni di variabili con estremi di integrazione

$$m\int_0^v v dv = -\frac{p\sigma(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_o}\int_\infty^r \frac{dr}{r^2}$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p\sigma(R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_o r}$$

dalla quale si ricava

$$v(r) = \sqrt{\frac{p\sigma(R_2^2 - R_1^2)}{m\epsilon_o r}}$$

per cui $v(0.22) = 7.63\,m/s$.