Sopra gli spettri di emissione del corpo nero

Secondo la teoria elettrodinamica di Maxwell le cariche accelerate emettono radiazione elettromagnetica. Dal momento che la materia é costituita da molecole caratterizzate da proprietá elettriche, l'agitazione termica fa sí che i corpi siano in grado di emettere radiazioni. L'agitazione delle molecole si traduce nella loro oscillazione armonica, la quale prevede che siano sottoposte ad un'accelerazione, e dunque all'emissione di energia. Ciascun corpo ad una determinata temperatura T é in grado di emettere radiazioni, ed ovviamente anche in grado di assorbirle. Si intuisce che, agendo sulle caratteristiche molecolari del corpo in questione, é possibile ottenere una notevole efficienza in termini di emissione e di assorbimento, ad esempio scegliendo un corpo conduttore. Fatto ció, si puó considerare per semplicitá una cavitá cubica, caratterizzata da pareti conduttrici e perfettamente riflettenti. Se ora si pratica un foro di dimensioni contenute l'interno della cavitá sará riempito dalla radiazione entrante, la quale inizierá a diffondersi e riflettersi sulle pareti, eccitando via via le molecole del materiale, ovvero aumentandone la temperatura. In risposta, le molecole stesse inizieranno ad oscillare e ad emettere a loro volta radiazione elettromagnetica fino a che si raggiunge l'equilibrio termico tra ambiente esterno e l'interno della cavitá, entrambi alla stessa temperatura T. In queste condizioni la densitá di energia elettromagnetica uscente dal foro deve essere la stessa di quella entrante, in ogni istante. All'interno le onde elettromagnetiche si comportano come onde stazionarie, ovvero vengono riflesse dalle pareti allo stesso modo di una corda vibrante fissata ad un estremo, dunque le pareti stesse si comportano come nodi per il fatto che sono conduttrici ed il campo elettrico tangente ad esse é nullo. L'onda elettromagnetica ha la forma

$$\xi = \xi_o \sin(k_1\, x + k_2\, x + k_3\, x - \omega t)$$

dove i coefficienti k_1,k_2,k_3 sono i numeri d'onda nelle tre dimensioni tali che sia $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = 2\pi/\lambda$ (considerato l'indice di rifrazione del mezzo all'interno della cavitá pari a uno $\lambda f = c$). Se le facce del cubo di lato l sono 6, saranno 6 le onde stazionarie generate, con le immancabili condizioni

$$k_1 l = n_1 \pi \qquad k_2 l = n_2 \pi \qquad k_2 l = n_3 \pi \qquad n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3...$$

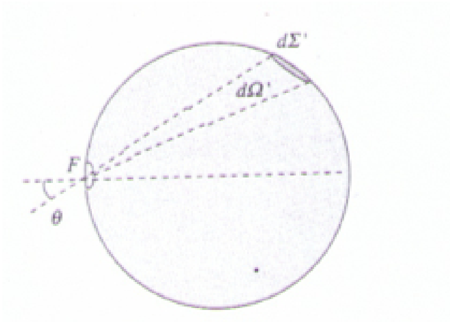
Dalle precedenti relazioni si ricavano le seguenti espressioni

$$k = \frac{\pi}{l}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2l}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$f = \frac{c}{2l}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

dalle quali si evince che la frequenza fondamentale di risonanza si ha per $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ ovvero $f = \sqrt{3}c/2l$. Alla luce di queste considerazioni, in ogni istante dal foro uscirá della radiazione elettromagnetica con una determinata potenza. Per ottenere questa energia per unitá di tempo posseduta dalla radiazione in equilibrio alla temperatura T e alla frequenza f sará necessario moltiplicare l'energia media nell'unitá di tempo per il numero di modi associati a quella frequenza, tenendo in considerazione che i piani di oscillazione sono due (rispettivamente quello del campo elettrico e del campo magnetico) poiché le onde elettromagnetiche sono polarizzate in maniera indipendente. Assumiamo per semplicitá concettuale che ora la cavitá cubica sia di forma sferica, anche se sará dimostrato che il risultato é indipendente da questa assunzione. Si immagini dunque che dal foro fuoriesca un flusso di energia con una potenza $P = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma$ dove $\mathbf{S}$ é il vettore di Poynting che indica il verso di propagazione dell'onda elettromagnetica e la sua energia nell'unitá di tempo per unitá di superficie Σ.



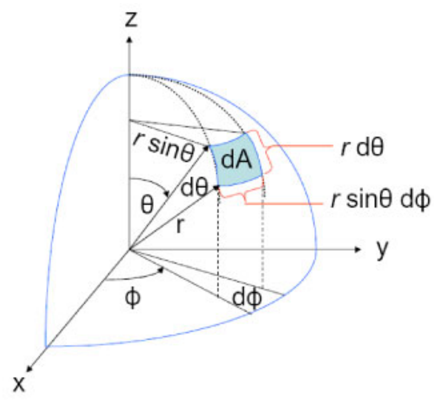
Poiché infatti un tratto di superficie infinitesima $d\Sigma$ irradia al di fuori del foro una densitá di energia che dipende dall'angolo solido sotto cui viene vista, si definisce il potere emissivo infinitesimo

$$d\varepsilon = \frac{dP}{d\Sigma} = d\mathbf{S} \cdot u_n = dS \cos\theta$$

dove θ é l'angolo tra la normale al foro di uscita e il vettore di Poynting. Sia dunque u la densitá di energia elettromagnetica per unitá di volume: considerata una frazione di angolo solido $\frac{d\Omega}{4\pi}$ il vettore di Poynting ha la forma $dS = c\,u\,\frac{d\Omega}{4\pi}$. É chiaro infatti che considerato un angolo di veduta maggiore verso l'interno della cavitá, maggiore sará anche la potenza registrata all'uscita del foro. L'angolo solido é per definizione

$$d\Omega = \frac{d\Sigma}{r^2}$$

dove r é il raggio della sfera considerata. Ritorna dunque utile l'assunzione circa la forma geometrica della cavitá



L'area infinitesima dA dalla quale proviene la radiazione puó essere espressa, secondo la figura, come il prodotto tra i due archi infinitesimi individuati da $r\,d\theta$ e $r\sin\theta\,d\phi$ ovvero $dA = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$. Tornando alla definizione di angolo solido si ha dunque

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

I precedenti ragionamenti sorgono in maniera naturale una volta che si considera la potenza istantanea come il flusso di una frazione di energia elettromagnetica $dU = u\,d\varrho$ nell'unitá di tempo dt dove $d\varrho = c\,dt\,d\Sigma'$ é il volumetto descritto dal passaggio delle onde ad una velocitá c in un intervallo temporale dt attraverso una sezione infinitesima $d\Sigma' = d\Sigma\cos\theta d\Omega/4\pi$ In definitiva $dP = \frac{dU}{dt} = c\,u\,d\Sigma'$ e siccome per definizione $dP = dS\,\cos\theta\,d\Sigma$ deve valere l'uguaglianza $dS = u\,c\,\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{u\,c}{4\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ e dunque si puó riscrivere il potere emissivo come

$$d\varepsilon = \frac{u\,c}{4\pi}\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

Considerando la figura, per ottenere il contributo da parte dell'intera calotta sferica si integra per $0 \le \phi \le 2\pi$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\varepsilon = \frac{u\,c}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

Se il primo integrale é immediato, per il secondo si considerano le identitá goniometriche $sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ ovvero si ha

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(2\theta)\,d\theta$$

Ora, sia $2\theta = t$ e dunque $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$. In linea con ció, gli estremi di integrazione diventano $0 \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$ e dunque

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin t\,dt = -\frac{(cos\pi - cos0)}{4} = \frac{1}{2}$$

In definitiva si ottiene la relazione tra potere emissivo e densitá di energia elettromagnetica

$$\varepsilon = \frac{c\,u}{4} \tag{1}$$

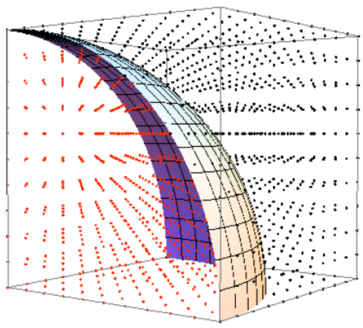
L'unitá di misura é chiaramente $\frac{m}{s}\frac{J}{m^3} = \frac{J}{s}\frac{1}{m^2} = \frac{W}{m^2}$ dunque la (1) descrive l'intensitá di emissione della radiazione. Si osservi come il risultato non dipenda dalla particolare configurazione geometrica, in quanto si é ragionato unicamente in termini di angolo solido. Ora, si definisce il *potere emissivo specifico* come il potere emissivo nell'intervallo di lunghezze d'onda compreso tra λ e $\lambda + d\lambda$ tale che $\varepsilon_\lambda = \frac{d\varepsilon}{d\lambda}$ e dunque la (1) in forma differenziale si scrive

$$\varepsilon_\lambda d\lambda = \frac{c}{4}u_\lambda d\lambda$$

definendo di conseguenza u_λ come densitá di energia specifica nell'intervallo specifico di lunghezze d'onda. Nel nostro sistema di onde stazionarie all'interno della cavitá non resta altro che contare il numero di modi possibili di vibrazione che hanno frequenza compresa tra la fondamentale $f_1 = \sqrt{3}c/2l$ e una generica frequenza f. Per far ció si contano tutte le combinazioni possibili degli interi n_1, n_2, n_3 tali che $f = \frac{c}{2l}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$ ovvero

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4l^2 f^2}{c^2} = \frac{4l^2}{\lambda^2}$$

Ora il termine $\frac{2l}{\lambda}$ rappresenta il raggio di una sfera individuata in uno *spazio degli* n di coordinate $(n_1; n_2; n_3)$ dunque in prima approssimazione si puó supporre che il numero di combinazioni possibili corrisponda di fatto al volume della sfera stessa. Tuttavia questa approssimazione presenta alcuni problemi: utilizzando una sfera si considerano sia valori positivi che negativi degli n, quando invece n_1, n_2, n_3 sono definiti solamente da valori positivi $1, 2, 3, 4....$ Invece di considerare l'intero volume della sfera, sará dunque necessario restringere il calcolo solo all'ottante positivo di sfera



Pertanto il numero di modi sará

$$N_v = \frac{1}{8}(\frac{4}{3}\pi R^3) = \frac{1}{8}(\frac{4}{3}\pi\frac{8l^3}{\lambda^3}) = \frac{4\pi\, l^3}{3\lambda^3}$$

Inoltre, come detto in precedenza, trattandosi di onde elettromagnetiche bisogna tenere conto dei due stati di polarizzazione indipendenti perpendicolari tra loro (le oscillazioni del campo magnetico e del campo elettrico) dunque il numero di modi di oscillazione raddoppia, ed esprimendo il numero di modi nell'unitá di volume l^3 della cavitá cubica presa in considerazione in precedenza si avrá in definitiva

$$n_v = \frac{2N_v}{l^3} = \frac{8\pi}{3\lambda^3}$$

Nell'intervallo delle frequenze f e $f + df$ ovvero delle lunghezze d'onda λ e $\lambda - d\lambda$ (in quanto $f \propto \frac{1}{\lambda}$) gli oscillatori per unitá di volume saranno rispettivamente

$$\frac{dn_v}{df} = \frac{d}{df}\frac{8\pi f^3}{3\,c^3} = \frac{8\pi f^2}{c^3}$$

$$\frac{dn_v}{-d\lambda} = \frac{8}{3}\pi\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{\lambda^3} = -\frac{8\pi}{\lambda^4}$$

Dunque

$$dn_f = \frac{8\pi f^2}{c^3}df$$

$$dn_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

Basterá ora moltiplicare l'energia media di ciascun oscillatore per il numero di modi di vibrazione, come preventivato, al fine di ottenere la densitá di energia elettromagnetica uscente ottenendo cosí l'espressione analitica della (1). In prima approssimazione, la probabilitá che un'oscillatore abbia un'energia compresa tra w e $w + dw$ dovrá essere proporzionale ad una distribuzione di Boltzmann $e^{\frac{-w}{k_b T}}$ dove k_b é la costante di Boltzmann. Dovrá dunque esistere una funzione $f(w) \propto e^{\frac{-w}{k_b T}}$ che descriva questa probabilitá in maniera tale che l'energia media assunta dagli infiniti oscillatori sia data da

$$w_m = \int_0^\infty df(w)$$

Cosí facendo la densitá di energia specifica potrá ad esempio essere espressa come

$$u_\lambda d\lambda = dn_\lambda w_m$$

A tal fine, assumiamo che esista una costante C per la quale sia $f(w) = C\, e^{\frac{-w}{k_b T}}$ e dunque $df = C\, e^{\frac{-w}{k_b T}} dw$. Integrando con continuitá tra 0 ed infiniti valori possibili di energia

$$w = \int_0^\infty df(w) = C \int_0^\infty e^{\frac{-w}{k_b T}} dw$$

si esprime la costante C come

$$C = \frac{w}{\int_0^\infty e^{\frac{-w}{k_b T}} dw}$$

in modo tale da poter scrivere $df = \frac{w}{\int_0^\infty e^{\frac{-w}{k_b T}} dw} e^{\frac{-w}{k_b T}} dw$ e pertanto

$$w_m = \frac{\int_0^\infty w\, e^{\frac{-w}{k_b T}} dw}{\int_0^\infty e^{\frac{-w}{k_b T}} dw}$$

Per il numeratore si integra per parti ponendo $\frac{1}{k_b T} = \alpha$ e rispettivamente $u = w$,$du = dw$,$dv = e^{-\alpha w} dw$,$v = -\frac{e^{-\alpha w}}{\alpha}$ Secondo la formula dell'integrazione per parti $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$ e pertanto

$$\int w\, e^{-\alpha w} dw = -w \frac{e^{-\alpha w}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int e^{-\alpha w} dw = -w \frac{e^{-\alpha w}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha w}}{\alpha^2} = -\frac{e^{-\alpha w}}{\alpha^2}(1 + \alpha\, w)$$

Estendendo dunque l'integrale tra 0 ed infinito

$$\int_0^\infty w\, e^{-\alpha w} dw = \left[-w \frac{e^{-\alpha w}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha w}}{\alpha^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{a^2}$$

Per l'integrale al denominatore si ha invece

$$\int_0^\infty e^{-\alpha w} dw = \left[-\frac{e^{-\alpha w}}{\alpha} \right]_0^\infty = -\frac{1}{e^\infty \alpha} + \frac{e^0}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

In definitiva si ottiene l'espressione per l'energia media, calcolata nell'ipotesi che possa assumere con continuitá ogni valore compreso tra zero ed infinito

$$w_m = \frac{\displaystyle\int_0^\infty w\, e^{\frac{-w}{k_b T}}\, dw}{\displaystyle\int_0^\infty e^{\frac{-w}{k_b T}}\, dw} = \frac{1}{\alpha} = k_b T \tag{2}$$

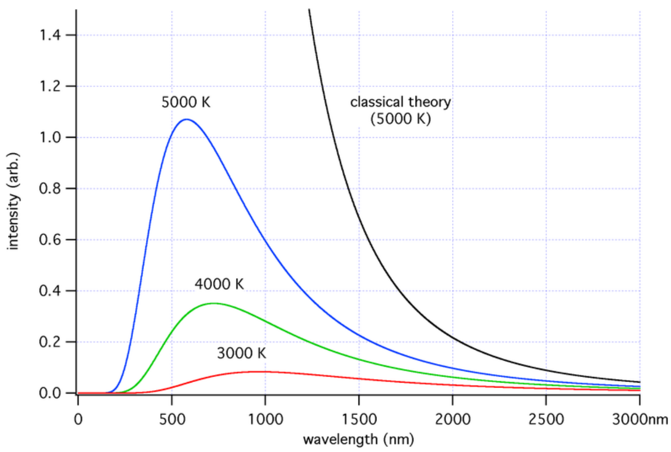
Pertanto all'espressione per la densitá si sostituisce

$$u_\lambda d\lambda = dn_\lambda k_b T = \frac{8\pi k_b T}{\lambda^4} d\lambda$$

ottenendo dunque un'espressione analitica per la (1) in forma differenziale

$$\varepsilon_\lambda d\lambda = \frac{2\pi\, c}{\lambda^4} k_b T d\lambda \tag{3}$$

nota come *formula di Rayleigh-Jeans.* Il potere emissivo risulta dunque funzione della temperatura alla quale si trova la cavitá (ricordiamo che questa temperatura deve essere la stessa dell'ambiente esterno, in condizioni di equilibrio termico). L'intensitá emessa sará indubbiamente direttamente proporzionale alla temperatura della materia emittente, giacché la luminositá di un corpo é tanto piú evidente quanto piú esso é incandescente (a tal proposito basti pensare al colore assunto da un pezzo di ferro ad alta temperatura). Come giá accennato, dal punto di vista teorico ció si spiega associando la temperatura di un corpo all'agitazione delle sue molecole, per oscillazioni maggiori é chiaro che si avranno emissioni maggiori di radiazioni. Sperimentalmente lo spettro di emissione é misurabile con elevata precisione. In particolare l'energia emessa assume un picco ad una determinata lunghezza d'onda, ed in generale le radiazioni con lunghezze d'onda maggiori sono emesse con intensitá molto piú bassa rispetto alle radiazioni a frequenze piú elevate, anche se per valori vicini allo zero, ovvero a queste frequenze, l'emissione ritorna a livelli trascurabili. A proposito dell'ultimo caso, si noti che in prossimitá di questi valori la (3) dovrebbe divergere verso l'infinito, ed infatti fu subito evidente che per lunghezze d'onda molto piccole questa legge era in completo disaccordo con l'esperienza, mentre invece l'accordo era buono per lunghezze d'onda molto grandi.



In base alla relazione $d\varepsilon = \varepsilon_\lambda d\lambda$ é possibile ottenere il potere emissivo integrale (l'area sotto la curva in figura). Naturalmente é implicito il fatto che quest'area avrá valore infinito, dal momento che la funzione diverge ($\lim_{\lambda\to 0} \varepsilon_\lambda d\lambda \ = +\infty$) Si calcola l'integrale nell'intervallo infinito di lunghezze d'onda

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi\, c}{\lambda^4} k_b T d\lambda = 2\pi\, c\, k_b T \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^4} d\lambda$$

$$= -\frac{2\pi\, c}{3} k_b T \left[\frac{1}{\lambda^3}\right]_0^\infty = \frac{2\pi\, c}{3} k_b T \left[\frac{1}{\lambda^3}\right]_\infty^0 = \infty$$

In netto contrasto con il principio di conservazione dell'energia.
Nonostante sul finire dell'ottocento furono ricavate varie leggi su base empirica per cercare di predire formalmente le caratteristiche dello spettro di emissione di questo cosiddétto *corpo nero* (ovvero un oggetto, come si é visto, idealizzato, con pareti perfettamente riflettenti e conduttrici) mancava una spiegazione razionale su basi teoriche. La (3) decretó la *catastrofe ultravioletta*, cosí denominata poiché la sua struttura perdeva di attendibilitá per lunghezze d'onda molto corte (cioé nella regione dell'ultravioletto). Nell'inverno del 1900 Max Planck approcció il problema da un diverso punto di vista. Nel calcolo dell'energia media (2) constató come errata la supposizione che gli oscillatori potessero assumere con continuitá ogni valore di energia. I valori di energia sono tutt'altro che continui, bensí discreti, ovvero possono essere multipli interi positivi o nulli di un energia specifica associata alla frequenza del singolo oscillatore $E = hf$ dove h é noto come *quanto d'azione di Planck*. Alla luce di queste osservazioni, la (2) non sará piú calcolata attraverso integrazione, ma con una somma di infiniti contributi da parte di infiniti oscillatori con energia $w = nhf$ e $0 \leq n < \infty$

$$w_m = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nhf\, e^{\frac{-nhf}{k_b T}}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-nhf}{k_b T}}}$$

Per calcolare questa somma si pone $x = e^{\frac{-hf}{k_b T}}$

$$\frac{hf \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = hf \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + ...}{1 + x + x^2 + x^3 + ...}$$

Si osservi ora che nello sviluppo in serie di McLaurin della funzione $f(x)_1 = \frac{1}{1-x}$ si ha

$$f(x)_1 = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

Mentre se si sviluppa $f(x)_2 = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$f(x)_2 = 1 + 2x + 3x^2 + ...$$

Il numeratore del calcolo dell'energia media ora non é altro che $x(1+2x+3x^2+ ...) = x(f(x)_2)$ mentre il denominatore é semplicemente $f(x)_1$ pertanto

$$\frac{hf\sum_{n=0}^{\infty} nx^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = hfx\frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{hfx}{1-x}$$

Sostituendo si ha

$$w_m = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nhf\, e^{\frac{-nhf}{k_bT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-nhf}{k_bT}}} = \frac{hf\, e^{\frac{-hf}{k_bT}}}{1-e^{\frac{-hf}{k_bT}}} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_bT}}-1} \tag{4}$$

Arrestando lo sviluppo dell'esponenziale nel denominatore al secondo ordine (il che equivale allo studio della funzione per valori molto piccoli della frequenza, ovvero per lunghezze d'onda molto grandi) con $\frac{hf}{k_bT} = x, f(x) = e^x = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1+x...$ si ha $e^{\frac{hf}{k_bT}} = 1+\frac{hf}{k_bT}$ e la (4) diviene $w_m = \frac{hf}{\frac{hf}{k_BT}+1-1} = k_bT$. Dunque a basse frequenze la (4) si riduce semplicemente all'espressione dell'energia media di Rayleigh-Jeans. In conseguenza di questa quantizzazione dell'energia il potere emissivo infinitesimo é espresso come

$$\varepsilon_\lambda d\lambda = \frac{2\pi\, c^2\, h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_bT}}-1}d\lambda \tag{5}$$

Nelle sue svariate forme, la (5) é detta *legge di Planck*.
L'accordo sperimentale é ottimo, concettualmente l'esistenza di "pacchetti di energia discreti" non fu digerita subito dal momento che formalmente la (5) é stata calcolata attraverso i metodi della fisica classica (nonostante l'escamotage di Planck). Nonostante sia la progenitrice della teoria dei quanti, una trattazione rigorosa della legge di Planck arrivó solo piú tardi, anche se le conclusioni sono ovviamente identiche alla (5). Il quanto d'azione h corrispondente a $6.626 \times 10^{-34} J\, s$ ebbe all'inizio un ruolo puramente di "costante di proporzionalitá" tra la minima energia di un oscillatore elettricamente carico e la sua frequenza di oscillazione (Planck calcoló inizialmente $6.55\times10^{-34}J\, s$), ma ben presto divenne il sigillo della meccanica quantistica negli anni seguenti.
Sulla scia di quanto fatto in precedenza, é possibile calcolare il valore del potere emissivo integrale (cioé l'area sotto la curva della (5)) con la sola importante differenza che ora non sará violato il principio di conservazione dell'energia: ció decretó il superamento della catastrofe ultravioletta. Si integra nell'intervallo $0 \leq \lambda < \infty$ e cioé dalle frequenze piú alte alle lunghezze d'onda piú grandi

$$\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi\, c^2\, h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_bT}}-1}d\lambda$$

Sia $x = \frac{hc}{\lambda k_bT}$ e dunque $d\lambda = -\frac{hc}{x^2k_bT}dx$. In virtú di questa sostituzione, affinché sia $\lambda = 0$ dovrá essere $x = \infty$ e viceversa, dunque il risultato é un capovolgimento degli estremi di integrazione.

$$\varepsilon = -\int_{\infty}^{0} \frac{2\pi c^3 h^2}{k_b T \lambda^5 x^2} \frac{dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi k_b^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

Il problema si riduce quindi allo studio dell'integrale $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x-1} dx$ per il quale bisogna fare alcune considerazioni. Si osservi che

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right)$$

Il termine tra parentesi, come visto in precedenza attraverso lo sviluppo in serie di McLaurin, corrisponde alla convergenza di una serie del tipo

$$\frac{1}{1-n} = 1 + n + n^2 + n^3 + ... + n^k = \sum_{k=0}^{\infty} n^k$$

L'integrale si traduce quindi in una somma di infiniti integrali

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + ...) dx = \int_0^{\infty} x^3 (e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + ...) dx$$

Dove ora l'espressione $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + ...$ corrisponde alla somma infinita di *n-termini* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}}$ e l'integrale assume la forma

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^{nx}} dx$$

Non resta altro che calcolare $\int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx$ ed estenderlo alla somma infinita. Per fare ció si integra ancora per parti, considerando $u = x^3$,$du = 3x^2 dx$,$dv = e^{-nx}$,$v = -\frac{e^{-nx}}{n}$

$$\int x^3 e^{-nx} dx = -\frac{x^3}{n} e^{-nx} + 3 \int x^2 \frac{e^{-nx}}{n} dx$$

Analogamente a quanto fatto prima

$$\int x^2 \frac{e^{-nx}}{n} dx = -\frac{x^2}{n^2} e^{-nx} + 2 \int x \frac{e^{-nx}}{n^2} dx$$

Ancora una volta

$$\int x \frac{e^{-nx}}{n^2} dx = -\frac{x}{n^3} e^{-nx} + \int \frac{e^{-nx}}{n^3} dx = -\frac{x}{n^3} e^{-nx} - \frac{e^{-nx}}{n^4}$$

Sostituendo nella prima espressione si arriva a

$$\int x^3 e^{-nx} dx = -\frac{x^3}{n} e^{-nx} - \frac{3x^2}{n^2} e^{-nx} - \frac{6x}{n^3} e^{-nx} - \frac{6\, e^{-nx}}{n^4}$$

Il calcolo dell'integrale definito conduce a

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx = \frac{6}{n^4}$$

Pertanto si calcola la somma infinita degli *n-termini* alla quarta potenza

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^{nx}}dx = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 6(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+...)$$

L'integrale iniziale é stato dunque ricondotto ad una *serie di Dirichlet* corrispondente ad una *funzione zeta di Riemann* del tipo $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ ovvero é necessario calcolare

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...$$

A tal fine si puó fare uso della formula

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}\,|B_{2k}|}{(2k!)}$$

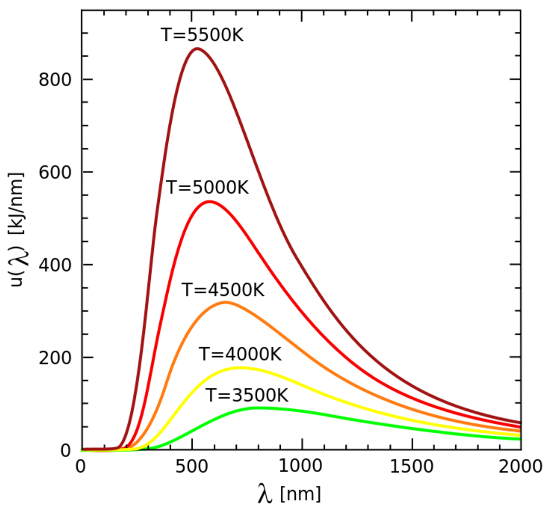
dove in questo caso é $k = 2$, mentre B_n sono i *numeri di Bernoulli* ($B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_4 = -1/30...$ ecc). Sostituendo i valori si arriva a $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ pertanto l'integrale vale

$$\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx = 6\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$$

Il potere emissivo corrisponde quindi a

$$\varepsilon = \frac{2\pi^5 k_b^4 T^4}{15\,h^3c^2} = \sigma T^4 \tag{6}$$

dove $\sigma = \frac{2\pi^5 k_b^4}{15\,h^3c^2} = 5.67\times10^{-8}W/m^2K^4$ é nota come *costante di Stefan-Boltzmann*. La (6) esprime dunque la *legge di Stefan-Boltzmann*, secondo la quale l'energia irradiata nell'unitá di tempo e nell'unitá di superficie da un corpo nero (l'area sotto la curva del grafico) é proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura.



Per qualsiasi altro corpo il potere emissivo integrale dipende anche dalle sue caratteristiche materiali, se si definisce *emissivitá* il rapporto

$$e = \frac{\varepsilon_C}{\varepsilon}$$

tra potere emissivo del corpo materiale e potere emissivo del corpo nero (preso come unitá di misura), la (6) assume la forma

$$\varepsilon_w = e\sigma T^4$$

Con $0 < e < 1$ Il massimo dell'energia irradiata corrisponde ad una condizione di corpo nero ($e = 1$). Per gli altri materiali l'emissivitá assume in generale valori diversi a seconda della temperatura. Qualche tempo prima di Planck, la (6) era giá stata ricavata sperimentalmente (oltre ad alcune osservazioni teoriche di termodinamica) e la conoscenza della costante di Stefan-Boltzmann per via sperimentale permise allo stesso Planck di trovare il primo valore approssimato del quanto d'azione h estraendone la radice cubica.
Dalla forma del grafico si deduce che una particolare lunghezza d'onda é irradiata assai di piú rispetto alle altre. Per questa lunghezza d'onda λ_{Max} la (5) ha dunque un massimo, calcolabile annullandone la derivata rispetto a λ

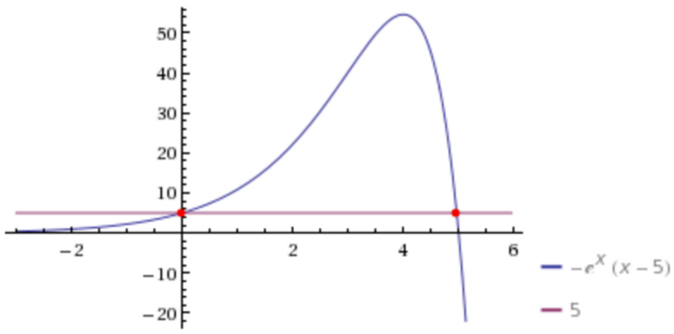
$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = 2\pi c^2 h \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{1}{\lambda^5(e^{\frac{hc}{\lambda k_b T}} - 1)}\right] = 0$$

$$-5\lambda^4 e^{\frac{hc}{\lambda k_b T}} + 5\lambda^4 = -\lambda^3 e^{\frac{hc}{\lambda k_b T}} \frac{hc}{k_b T}$$

semplificando e ponendo $x = \frac{hc}{\lambda k_b T}$ si arriva all'equazione

$$e^x(5 - x) = 5$$

la quale é risolvibile solo graficamente analizzando le intersezioni tra la curva $f(x)_1 = 5e^x - xe^x$ e la retta $f(x)_2 = 5$ come indicato in figura



Si possono notare due intersezioni per $x_1 = 0$ e $x_2 \approx 4.965364...$, tuttavia la prima soluzione é assurda poiché λ_{Max} dovrebbe tendere all'infinito, mentre per la seconda si ottiene

$$\lambda_{Max} = \frac{hc}{x_2 k_b T} = \frac{2.8978 \times 10^{-3}}{T}$$

ovvero

$$\lambda_{Max}T = 2.8978 \times 10^{-3} m\,K \tag{7}$$

La (7) é nota come *prima legge di Wien.* Il valore della lunghezza d'onda irradiata maggiormente diminuisce all'aumentare della temperatura (com'é evidente in figura). Questa legge, cosí come la (6), era giá stata scoperta sperimentalmente; tuttavia ancora una volta fu la legge di Planck a fornirne un'interpretazione teorica. Immaginando di osservare lo spettro di una stella, in base al picco di emissione di una determinata lunghezza d'onda é quindi possibile determinare la temperatura dell'oggetto emittente, la quale sará tanto piú elevata quanto piú corta é la lunghezza d'onda misurata. In natura le stelle rosse sono per l'appunto quelle che emettono luce a lunghezza d'onda maggiore, e dunque la loro temperatura é assai minore rispetto alle stelle bianche, cosí come la loro aspettativa di vita. C'é da dire tuttavia che la temperatura calcolata corrisponde solo alla temperatura superficiale della stella (al livello della fotosfera del nostro Sole). Se ora si calcola l'ordinata del massimo nella (5) $\varepsilon_\lambda(\lambda_{Max})$ si ottiene

$$\frac{2\pi c^2}{\lambda_{Max}^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_{Max}k_bT}}} = \frac{2\pi k_b^5 T^5 x_{Max}^5}{h^5c^3(2.8978\times 10^{-3})^5}\frac{1}{e^{x_{Max}}-1}$$

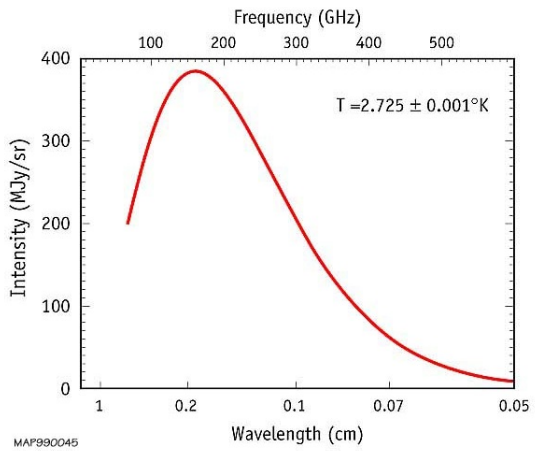
e ponendo

$$a = \frac{2\pi k_b^5 x_{Max}^5}{h^5c^3(2.8978\times 10^{-3})^5}\frac{1}{e^{x_{Max}}-1} = 1.287\times 10^{-5} W/m^3K^5$$

si ottiene la *seconda legge di Wien*

$$\varepsilon_{\lambda_{Max}} = aT^5 \tag{8}$$

L'intensitá massima irradiata é proporzionale alla quinta potenza della temperatura. Anche per la (8) valgono le medesime considerazioni delle (6),(7) circa la sua natura sperimentale.
In natura lo spettro di emissione piú vicino a quello di un corpo nero lo si ha per la *radiazione cosmica di fondo* (entro l'errore sperimentale)



Questa radiazione é presente in ogni direzione del cielo in cui si guardi, essa corrisponde all'impronta lasciata dall'universo subito dopo i suoi primi 300.000 anni di vita, quando la temperatura era abbastanza bassa affinché potessero formarsi gli atomi e la radiazione potesse attraversarli senza ionizzarli. Lo spettro di emissione corrisponde a quello di un corpo nero alla temperatura di circa $2.725\,K$ alla quale corrisponde un picco di lunghezza d'onda irradiata $\lambda_{Max} = 0.2\,cm$ (microonde). Una radiazione a lunghezze d'onda cosí grandi é dovuta al fenomeno dello *spostamento verso il rosso* in seguito all'espansione dell'universo nel corso del tempo. Tale rilevamento forní una prova fondamentale a sostegno della teoria del Big Bang, oltre ad aver determinato la nascita della moderna cosmologia sperimentale.

Matteo Parriciatu