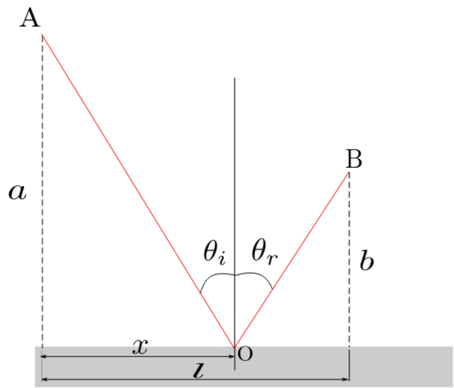
Sulla riflessione e rifrazione della luce

Leggi di Cartesio: Risulta di notevole interesse concettuale l'applicazione del cosiddetto *principio di Fermat* al caso della radiazione luminosa, seppur nell'approssimazione classica e semplicistica, ovvero senza tener conto dell'effettiva interazione tra radiazione e materia, ma servendosi di ragionamenti geometrici. Nella sua forma piú semplice il principio di Fermat afferma che la luce si propaga seguendo il percorso piú corto, nel minor tempo possibile. In figura é mostrato il caso della riflessione di un raggio di luce (indicato in rosso) che incide su di una superficie riflettente con un'angolo θ_i rispetto alla normale.



Dal momento che $AB = l$, $AO = x$, e poiché $s_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$ e $s_2 = \sqrt{(l-x)^2 + b^2}$ La luce percorre un tratto totale

$$s = s_1 + s_2 = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(l-x)^2 + b^2}$$

in un tempo $t = \frac{s}{c}$ (se il mezzo é l'aria si puó facilmente porre $v = \frac{c}{n} \approx c$) ovvero

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}{c}$$

In virtú del principio di Fermat, osserviamo che esiste una funzione della distanza $s(x)$ (dove x é l'unica variabile) il cui valor minimo sará di fatto quello seguito dalla luce. Sia dunque

$$s(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(l-x)^2 + b^2}$$

annullandone la derivata $\frac{ds}{dx} = 0$ risulta

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{2}\frac{2(l-x)(-1)}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}} = 0$$

che si traduce in

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}$$

nota come *prima legge di Cartesio*, riscrivibile in forma piú accessibile considerando che

$$\cos\alpha_1 = \frac{x}{s_1} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{l-x}{s_2} = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+b^2}}$$

dove $\alpha_1 = 90-\theta_i$, $\alpha_2 = 90-\theta_r$ e dunque $\cos(90-\theta_i) = \sin\theta_i$, $\cos(90-\theta_r) = \sin\theta_r$ pertanto

$$\sin\theta_i = \sin\theta_r$$

equazione che ha come unica soluzione

$$\theta_i = \theta_r \tag{1}$$

ovvero la legge della riflessione, o prima legge di Cartesio. In effetti, ponendo per semplicitá $a = b = h$ ed elevando al quadrato

$$\frac{x^2}{h^2+x^2} = \frac{(l-x)^2}{(l-x)^2+h^2}$$

si riscrive

$$\frac{(l-x)^2}{(l-x)^2(1+\frac{h^2}{(l-x)^2})} = \frac{1}{1+\frac{h^2}{(l-x)^2}}$$

ottenendo

$$(1+\frac{h^2}{(l-x)^2})x^2 = x^2 + x^2\frac{h^2}{(l-x)^2} = x^2+h^2$$

e dunque

$$x = \frac{l}{2}$$

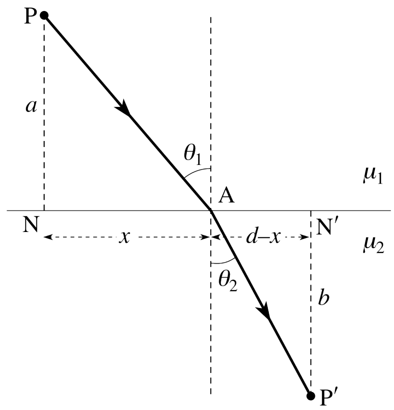
si puó dimostrare che $s(\frac{l}{2})$ é effettivamente un minimo calcolando la derivata seconda

$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{\sqrt{x^2+h^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+h^2}}}{x^2+h^2} - \frac{(-1)\sqrt{(l-x)^2+h^2} + \frac{(l-x)^2}{\sqrt{(l-x)^2+h^2}}}{(l-x)^2+h^2}$$

e dunque

$$s''(\frac{l}{2}) = \frac{\frac{\sqrt{l^2+4h^2}}{2} - \frac{l^2}{2\sqrt{l^2+4h^2}}}{\frac{l^2}{4}+h^2} - \frac{(-1)\frac{\sqrt{l^2+4h^2}}{2} + \frac{l^2}{2\sqrt{l^2+4h^2}}}{\frac{l^2}{4}+h^2} = \frac{\sqrt{l^2+4h^2} - \frac{l^2}{\sqrt{l^2+4h^2}}}{\frac{l^2}{4}+h^2}$$

La condizione $s''(\frac{l}{2}) > 0$ si riduce allo studio del numeratore $\sqrt{l^2+4h^2} > \frac{l^2}{\sqrt{l^2+4h^2}}$ ovvero $4h^2 > 0$ la quale é sempre verificata. Dunque si puó affermare che $s''(x)$ é crescente per $x = \frac{l}{2}$, motivo per cui $s(\frac{l}{2})$ é un minimo. La luce segue dunque il percorso piú breve, impiegando il minor tempo possibile. Oltre ad essere riflessa, parte della radiazione é soggetta a fenomeni di rifrazione attraverso la superficie di incidenza. Anche in questo caso vale il principio di Fermat. Nella rifrazione il raggio luminoso é soggetto ad un brusco cambiamento della direzione di propagazione a causa di un rallentamento dovuto al diverso indice di rifrazione nel nuovo mezzo. Dal punto di vista fisico la radiazione é costretta a serpeggiare tra le molecole del mezzo invece che attraversarlo in linea retta. Si osserva che il fenomeno sará tanto piú marcato quanto maggiore é la densitá del mezzo. Se nel primo mezzo μ_1 la luce si propaga con una velocitá $v_1 = \frac{c}{n_1}$ nel secondo mezzo μ_2 sará $v_2 = \frac{c}{n_2}$ ed il tempo totale impiegato sará $t = t_1 + t_2$ dove $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}$ e $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{v_2}$



Annullando la derivata $\frac{dt}{dx} = 0$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = 0$$

Ora, poiché $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \cos\alpha_1 = \cos(90-\theta_1) = \sin\theta_1$ e $\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}} = \sin\theta_2$ il minimo della $t(x)$ si riduce a $\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$ ovvero

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{2}$$

nota come legge di Snell, legge della rifrazione o seconda legge di Cartesio. Sulla base delle considerazioni fatte nel caso della riflessione, la (2) esprime effettivamente un minimo, dal momento che ora le equazioni sono solo moltiplicate per dei termini positivi quali v_1 e v_2.

Matteo Parriciatu