

# Compendio di Meccanica Celeste

Matteo Parriciatu

1 settembre 2016

## 1 Il campo di forza centrale

In natura esistono forze attrattive o repulsive di vario genere, da una scala atomica a una interplanetaria. Per qualche motivo esiste una forza che comanda le interazioni tra corpi dotati di massa: la forza gravitazionale. Siano dati due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente: la forza gravitazionale fa sí che il primo attragga il secondo, accelerandolo verso di sé, e che il secondo attragga il primo con una forza uguale e contraria. Allo stesso modo il nostro Sole attira la Terra verso di sé, e la Terra attira il Sole con la stessa forza. Tuttavia, com'è noto, è la Terra il corpo maggiormente costretto all'interazione, dal momento che, per le leggi della dinamica classica

$$F = m_1 a_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_2 a_2$$

il Sole, avente massa  $m_2$  molto maggiore, è quello che risente dell'accelerazione minore, seppur presente. Il corpo con massa minore inizia dunque ad accelerare inesorabilmente a ritmi più elevati verso la fonte dell'attrazione, verso una situazione di minima energia potenziale, fino alla collisione. Com'è possibile constatare empiricamente, questo non è stato finora il destino della Terra. Infatti, se invece che dalla quiete, si fa in modo di comunicare al corpo una determinata velocità iniziale all'inizio dell'interazione, allora questi sarà sì attratto, ma instaurerà (nel caso ideale) un moto equilibrato da una forza centripeta tale che

$$m_1 \frac{v^2}{r} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Così facendo è comunque possibile raggiungere una situazione stabile a minima energia potenziale, come ora si dimostrerà. Si assuma che il corpo, all'inizio dell'interazione, si trovi ad una distanza sconfinata, in modo da trascurare l'interazione con la sorgente gravitazionale. Dal momento che la forza gravitazionale è conservativa, è sempre possibile esprimerla come il gradiente di un'energia potenziale  $\mathbf{F} = -\text{grad}U$  ovvero  $dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F dr$  in quanto, come si constaterà in seguito,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{r}$  sono paralleli. Dal momento che  $F$  è anche una forza attrattiva (tali forze si indicano con un segno meno davanti) il lavoro eseguito dal campo gravitazionale sul corpo per portarlo dall'infinito fino alla distanza  $r = a$  è naturalmente  $W = -\Delta U$  dove

$$\Delta U = \int_{\infty}^r F dr = \int_{\infty}^r \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = - \left[ \gamma \frac{m_1 m_2}{r} \right]_{\infty}^r = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

e dunque

$$W = \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Poiché però è anche  $F = m_1 \frac{dv}{dt}$ , si ha che  $F dr = m \frac{dr}{dt} dv = m_1 v dv$  ovvero

$$W = m_1 \int_{v_0}^{v_f} v dv = \frac{1}{2} m_1 v_f^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2$$

eguagliando le due espressioni si enuncia la conservazione dell'energia meccanica del tipo

$$E = K_f + U_f = K_i + U_i = \text{costante}$$

In definitiva si arriva a

$$E = \frac{1}{2}m_1 v^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Ora, dalla condizione di equilibrio tra forza centripeta e forza gravitazionale

$$m_1 v^2 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

si sostituisce nel bilancio energetico ottenendo

$$E = \frac{1}{2}\gamma \frac{m_1 m_2}{r} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{2r}$$

Il corpo, la cui energia cinetica é stata assunta minore dell'energia potenziale gravitazionale, si trova in una situazione di minima energia ( $E < 0$ ), ritrovandosi dunque legato ad un'orbita alla quale non può sottrarsi senza ricevere ulteriore energia. Questa energia é pertanto detta *energia di legame*. In assenza di forze esterne atte a sottrarre energia, questa situazione é quella che accomuna tutti i pianeti del sistema solare, i quali, avendo assunto un'adeguata energia iniziale al momento della loro formazione (miliardi di anni fa, quando i primi dischi di polvere interstellare e gas iniziavano ad addensarsi) continuano per inerzia a percorrere le loro orbite.

Durante questa premessa sono state utilizzate nozioni risalenti a Newton, il quale si riferisce alle osservazioni teoriche ed empiriche di Keplero e del Galilei. Risulta fondamentale il concetto di campo di forza centrale. Quest'ultima é quella forza che:

- giace sempre sulla retta congiungente il corpo a essa soggetto con un punto fisso  $O$  detto *centro di forza*
- é caratterizzata dal fatto che il suo modulo dipende solo dalla distanza  $r$  da  $O$

Se  $F_c$  é una forza centrale allora  $\mathbf{F}_c = f(r)\mathbf{u}_r$  dove  $\mathbf{u}_r$  é il versore nella direzione congiungente il corpo al centro di forza. In risposta a queste caratteristiche, un corpo soggetto a un campo di forza centrale sará sottoposto ad un'interazione esclusivamente radiale, dal momento che per definizione questo é l'unico effetto di una forza centrale.

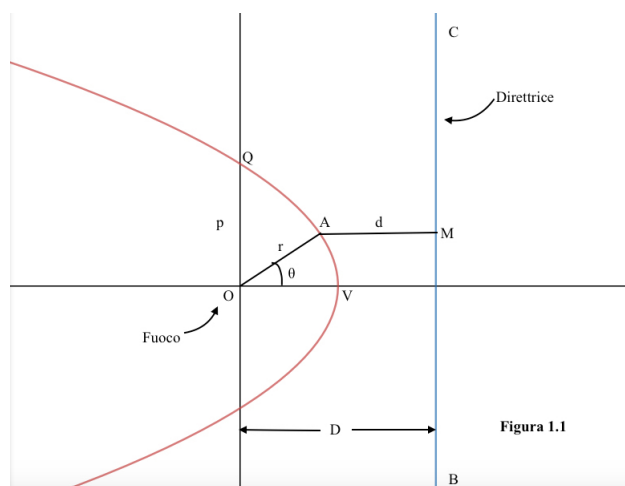


Figura 1.1

La traiettoria del corpo risulta caratterizzata dal fatto che il rapporto tra la distanza  $r$  dal centro di forza e la distanza  $d$  dalla direttrice  $CB$  é costante e corrisponde all'*eccentricitá*  $\epsilon$  della traiettoria ovvero

$$\frac{r}{d} = \epsilon$$

Si noti che la distanza  $D$  tra la direttrice e il fuoco é esprimibile come

$$D = r \cos \theta + d = r \cos \theta + \frac{r}{\epsilon}$$

e dal momento che  $\frac{\overline{OQ}}{D} = \frac{p}{D} = \epsilon$  si risolve rispetto alla traiettoria  $r$  ottenendo

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (1)$$

che é la generica equazione di una conica di eccentricitá  $\epsilon$ . Si noti che se  $\epsilon = 0$  l'equazione é quella di una circonferenza di raggio  $r = p$ , mentre se  $\epsilon = 1$  la (1) rappresenta una parabola (infatti é possibile constatarne il limite  $\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{p}{1 + \cos \theta} = \infty$ ) mentre per  $0 < \epsilon < 1$  si ottiene un'ellisse, ed infine per  $\epsilon > 1$  la traiettoria é un'iperbole. La forma della (1), come vedremo, é funzione dell'energia di cui dispone il corpo al momento dell'inizio dell'interazione:

- se  $E < 0$  la traiettoria é un'ellisse (caso già esaminato)
- se  $E = 0$  la traiettoria é una parabola
- se  $E > 0$  la traiettoria é un'iperbole

Gli ultimi due casi hanno rappresentato storicamente una grande opportunità per l'ingegneria aerospaziale in termini di fionde gravitazionali (ovvero lo sfruttamento dell'energia gravitazionale di un astro in movimento per ricevere una spinta maggiore), mentre il primo caso rappresenta quello piú generale che accomuna tutti gli astri, come fu notato da Keplero a suo tempo.

Per la simmetria dell'oggetto dei nostri studi é preferibile l'utilizzo di coordinate polari, definendo un vettore posizione  $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$  se  $\mathbf{u}_r$  é il versore nella direzione di  $\mathbf{r}$ . Infatti, al fine di conoscere la forma della traiettoria secondo la (1) é necessario conoscere la legge del moto secondo le leggi della dinamica. Definita pertanto una traiettoria semplice nel piano  $xy$  (e un campo di forza centrale ha luogo solo in un piano, per definizione, in quanto si é scelto che  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = 0$  ovvero  $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$ ) sará possibile calcolare una legge nella forma  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ .

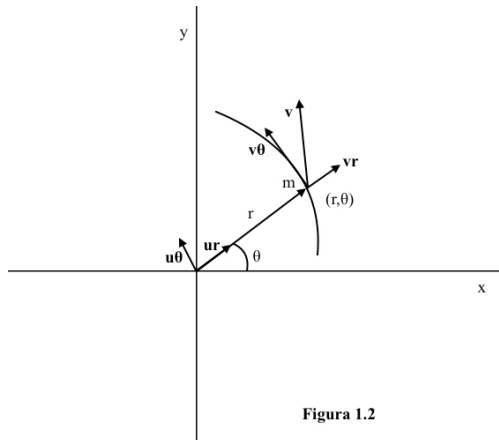


Figura 1.2

Per definizione, la velocità istantanea si scrive  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r)$ . Richiamando le basilari regole di derivazione e il fatto che la derivata temporale di un versore è un vettore perpendicolare al versore stesso, il quale ne descrive il cambiamento di orientazione angolare nel tempo:

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

D'ora in poi indicheremo le derivazioni temporali delle quantità in gioco con l'usuale notazione  $\frac{dc}{dt} = \dot{c}$ . In definitiva si ottiene la velocità in componenti radiale e tangenziale. Da ciò si ricava il vettore accelerazione istantanea, definito come  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta\right)$ . Calcolando si ottiene

$$\mathbf{a} = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\mathbf{u}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della proprietà della doppia derivata di un versore, il quale, ruotato due volte di 90 gradi, risulta orientato a 180 gradi rispetto all'orientamento iniziale, finendo per opporsi al versore iniziale. Applichiamo ora la legge della dinamica alla massa  $m$

$$\mathbf{F} = f(r)\mathbf{u}_r + 0\mathbf{u}_\theta = m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta]$$

Si noti che per definizione un campo di forza centrale stabilisce un'interazione esclusivamente radiale, infatti  $\mathbf{F}$  ha solo componente radiale, ragion per cui le equazioni del moto in un campo di forza centrale divengono

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad (2)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (3)$$

Alla luce di ciò è possibile ricavare alcune proprietà fondamentali per le traiettorie nei campi di forza centrali. Si noti che la (3) è riscrivibile come

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

che si riduce a  $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$  ovvero

$$r^2\dot{\theta} = \text{costante}$$

un corpo di massa  $m$  sottoposto ad un campo di forza centrale conserva il proprio momento angolare. Ciò è altresì derivabile dal fatto che sul corpo non si esercitano momenti di forza esterni, perché  $f(r)$  è l'unica forza in gioco. Si ha  $\vec{\Omega} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$  se  $L$  è il momento angolare, e dunque  $L = \text{costante}$ . Si dimostra inoltre che, così come fu messo a principio da Keplero, il raggio vettore  $\mathbf{r}$  descrive aree uguali in tempi uguali. Osservando la figura 1.2 si considera infatti un triangolo infinitesimo di base  $r d\theta$  e lato  $r$  e dunque avente area  $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$  la sua derivata temporale si scrive

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \quad (4)$$

e risulta costante proprio perché, come detto,  $r^2\dot{\theta} = \text{costante}$ . La (4) è definita *velocità areolare*, ed esprime la legge delle aree in un campo di forza centrale.

## 2 Le equazioni del moto

Al fine di determinare la traiettoria del corpo in base alla legge del moto, o la legge del moto in base alla traiettoria, ci si rifà alle equazioni (2) e (3), riscrivibili in diverse forme che risultano spesso di grande utilità. Ad esempio, scrivendo la conservazione del momento angolare  $r^2\dot{\theta} = costante = \psi$  è possibile esprimere la (2) come

$$\ddot{r} - \frac{\psi^2}{r^3} = \frac{f(r)}{m} \quad (5)$$

Spesso è anche più agevole sostituire la variabile della traiettoria con il suo inverso  $\zeta = \frac{1}{r}$ , al fine di eliminare ogni variabile temporale. Per far ciò si parte dal fatto che  $\dot{\theta} = \frac{\psi}{r^2} = \psi\zeta^2$  e dunque, sempre partendo dalla (2), si calcola

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{\psi}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\psi \frac{d\zeta}{d\theta}$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso di una derivazione implicita approfittando del fatto che  $\frac{d\zeta}{dr} = -\frac{1}{r^2}$ . A seguito di ciò

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \left[ -\psi \frac{d\zeta}{d\theta} \right] = \frac{d}{d\theta} \left[ -\psi \frac{d\zeta}{d\theta} \right] \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left[ -\psi \frac{d\zeta}{d\theta} \right] \dot{\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[ -\psi^2 \zeta^2 \frac{d\zeta}{d\theta} \right] = -\psi^2 \zeta^2 \frac{d^2\zeta}{d\theta^2}$$

Pertanto si sostituisce nella (2)

$$m(-\psi^2 \zeta^2 \frac{d^2\zeta}{d\theta^2} - \psi^2 \zeta^3) = f(1/\zeta)$$

facendo un po' di ordine

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta = -\frac{f(1/\zeta)}{m\psi^2\zeta^2} \quad (6)$$

Nonostante dalle equazioni (2) e (3) sia possibile ricavare la traiettoria nella forma  $r = r(t)$ , per motivi di praticità è preferibile ricavare l'espressione  $r = r(\theta)$  dove naturalmente  $\theta = \theta(t)$ , eliminando ogni variabile temporale dall'equazione della traiettoria.

Trascurando ogni interazione con altri corpi (problema dei due o tre corpi) è possibile assumere la conservazione dell'energia meccanica e ricavare le equazioni del moto nei campi centrali in termini energetici. Per definizione una forza centrale è anche conservativa, condizione esprimibile, a pari merito, nei due modi seguenti

$$\begin{cases} \mathbf{F} = -grad U \\ rot \mathbf{F} = 0 \end{cases}$$

È possibile esprimere la legge della forza centrale per mezzo dell'opposto del gradiente del suo potenziale, e a partire da ciò,  $\mathbf{F}$  è anche un campo irrotazionale, dal momento che il rotore di un gradiente è sempre nullo. Come affermato nella prima sezione, dal momento che  $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{u}_r$ , dall'operazione gradiente si ha

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(r)\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = f(r) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot d\mathbf{r} = f(r) \frac{|\mathbf{r}| dr}{|\mathbf{r}|} = f(r) dr$$

poiché  $\mathbf{r}$  e  $d\mathbf{r}$  sono paralleli per definizione, il prodotto scalare si riduce al prodotto algebrico. Dunque integrando si ricava la forma generale

$$U = - \int f(r) dr$$

La conservazione dell'energia si scrive  $E = K + U$  con  $K = \frac{1}{2}mv^2$  dove per la velocità del corpo si intende la velocità scalare corrispondente al modulo della velocità istantanea  $|v| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$ . In definitiva l'equazione più generale per la conservazione dell'energia nell'orbita di un corpo in un campo di forza centrale  $f(r)$  è

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r) dr = E$$

Ci proponiamo ora di rendere questa equazione indipendente dal tempo, ricordando che  $\dot{r} = -\psi \frac{d\zeta}{d\theta}$  e  $\dot{\theta}^2 = \frac{\psi^2}{r^4}$  si ricava

$$\left(\frac{d\zeta}{d\theta}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{\psi^2 m} \left(E + \int f(r) dr\right) \quad (7)$$

Inoltre, scrivendo  $\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{d\zeta}{dr} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$  e riordinando i termini

$$\frac{m\psi^2}{2r^4} \left[ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 \right] - \int f(r) dr = E \quad (8)$$

In questo modo, la tetrade di equazioni (5),(6),(7),(8) mette a disposizione varie alternative di impostazione dei problemi di meccanica celeste. Per esempio, ci si potrebbe proporre di dimostrare che se la legge della forza centrale è definita da

$$F = -\frac{K}{r^2}, \quad K > 0$$

cioè una legge di attrazione proporzionale all'inverso del quadrato della distanza, la traiettoria della particella è una conica.

A tal fine potremmo far uso della (6), con  $f(1/\zeta) = -K\zeta^2$  ovvero, sostituendo

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta = -\frac{K\zeta^2}{m\psi^2\zeta^2} = \frac{K}{m\psi^2}$$

Equazione differenziale di secondo grado nella variabile  $\theta$  per la quale esiste una soluzione  $\zeta = \zeta_H + \zeta_M$  dove  $\zeta_H$  è la soluzione omogenea (secondo membro nullo) pensabile nella forma  $\zeta_H = e^{p\theta}$  dove  $p$  è ricavabile per sostituzione.  $\zeta_M$  è invece la soluzione particolare, associata all'esistenza di una costante  $Q$  tale che  $\zeta_M = Q \frac{K}{m\psi^2}$ , anch'essa ricavabile per sostituzione. Tuttavia è chiaro che, a giudicare dalla forma dell'equazione (il coefficiente davanti al termine lineare  $\zeta$  è unitario) e dal momento che  $\frac{K}{m\psi^2}$  non è funzione di  $\theta$ , sostituendo si ricava  $Q = 1$  e dunque  $\zeta_M = \frac{K}{m\psi^2}$ . Per quanto riguarda la soluzione omogenea, si ha  $\frac{d\zeta}{d\theta} = pe^{p\theta}$  e da qui  $\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} = p^2e^{p\theta}$ . Sostituendo i valori si giunge a  $p^2e^{p\theta} + e^{p\theta} = 0$ , dividendo ambo i membri per  $e^{p\theta}$  (che è sempre diverso da zero) si giunge a

$$p^2 + 1 = 0$$

ovvero

$$p_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Pertanto esistono due soluzioni,  $p_1 = i$  e  $p_2 = -i$  dalle quali  $\zeta_H$  avrà anch'essa le due forme

$$\zeta_H = c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{-i\theta}$$

ora, attraverso le formule di Eulero

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

si sostituisce

$$\zeta_H = c_1 \cos \theta + c_1 i \sin \theta + c_2 \cos \theta - c_2 i \sin \theta$$

Riordinando i termini simili, impostando  $c_1 + c_2 = A$  e  $i(c_1 - c_2) = B$  e unendo la soluzione omogenea con quella particolare, si giunge alla soluzione dell'equazione

$$\zeta = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{K}{m\psi^2}$$

I coefficienti  $A$  e  $B$  dipendono chiaramente dalle condizioni iniziali del moto; queste condizioni possono essere efficacemente riassunte scrivendo la soluzione nella seguente forma, del tutto equivalente

$$\zeta = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \theta \right) + \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \theta \right) + \frac{K}{m\psi^2}$$

dove ora  $\sqrt{A^2 + B^2} = C$  é l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente i cateti  $A$  e  $B$ . Si noti dunque che, detto  $\phi$  l'angolo interno del triangolo, sará  $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin \phi$  e  $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos \phi$ , e pertanto

$$\zeta = C(\cos \phi \cos \theta) + C(\sin \phi \sin \theta) + \frac{K}{m\psi^2}$$

siccome  $\cos(\theta - \phi) = \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta$  si ha infine

$$\zeta = \frac{K}{m\psi^2} + C \cos(\theta - \phi)$$

$\phi$  rappresenta la fase del moto, la quale é sempre possibile porre uguale a zero. Sostituendo ora la variabile della traiettoria si ottiene

$$r = \frac{1}{\frac{K}{m\psi^2} + C \cos \theta}$$

Confrontando questa espressione con la (1), riscritta nel modo seguente

$$r = \frac{1}{1/p + \epsilon/p \cos \theta}$$

si ottiene che la traiettoria é proprio una conica avente i seguenti parametri

$$p = \frac{m\psi^2}{K} \qquad \frac{\epsilon}{p} = \frac{\epsilon K}{m\psi^2} = C \qquad \epsilon = \frac{m\psi^2 C}{K}$$



### 3 La forma della traiettoria

Nella sezione precedente é stato dimostrato come fosse possibile ricavare l'equazione della traiettoria di un corpo a partire dalla legge della forza centrale a cui é soggetto. É stato inoltre accennato in precedenza come la forma analitica di  $r(\theta)$  dipenda dalle condizioni iniziali del moto, in particolare dall'energia di legame dell'interazione. Un corpo dotato di energia cinetica iniziale sar  meno costretto al campo di forza rispetto ad uno che parte dalla quiete al momento dell'interazione. Un esempio intuitivo pu  essere condotto su di un oggetto sottoposto al campo gravitazionale terrestre: lanciando l'oggetto verso l'alto, in direzione radiale opposta rispetto alla forza che lo attira verso il basso, gli si concede l'energia necessaria per passare da una condizione di minimo potenziale ad un potenziale maggiore, ma poich  questa non é sufficiente rispetto alla magnitudine dell'attrazione terrestre, l'oggetto ricadr  inesorabilmente verso una situazione stabile (ad esempio a contatto con il terreno, dov'  equilibrato dalla reazione vincolare). Lanciando ora l'oggetto a velocit  via via pi  elevate, questi coprir  gittate sempre maggiori, finch  non lo si lancia con una velocit  tale che la sua gittata copra, in volo, l'intera circonferenza terrestre. L'oggetto continua s  a cadere verso il centro della Terra, ma in assenza di attriti instaura un equilibrio inerziale, creando un'orbita geostazionaria (in questo caso l'energia di legame é dunque minore di zero). Aumentando ulteriormente il valore dell'energia di legame, e portandola ad esempio ad un valore nullo, é intuitivamente possibile permettere al corpo di allontanarsi dalla fonte gravitazionale: sia  $K_i$  l'energia cinetica comunicata all'oggetto,  $U_i$  il valore del suo potenziale al momento in cui gli si comunica la forza viva,  $K_f$  l'energia cinetica finale dell'oggetto (che per semplicit  é anche possibile assumere uguale a zero, ovvero il corpo abbandona il pianeta utilizzando tutta la sua energia iniziale) ed infine  $U_f$  il valore del potenziale ad una gran distanza dal centro di forza, tale che sia possibile assumerlo uguale a zero.

$$E = K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$E = \frac{1}{2}m v_o^2 - \gamma \frac{mM}{r} = 0$$

ovvero

$$\frac{1}{2}m v_o^2 = \gamma \frac{mM}{r}$$

dove  $r$  nel nostro caso é il raggio terrestre, al livello del quale abbiamo comunicato all'oggetto l'energia  $K_i$ . La velocit  minima affin  l'oggetto lasci il pianeta di massa  $M$  corrisponde a

$$v_o = \sqrt{2\gamma \frac{M}{r}}$$

Orientandoci dal particolare al generale, la velocit  minima comunicabile ad un corpo affin  questi si sottragga all'interazione con un qualsiasi campo di forza centrale definito da un potenziale tale che  $\mathbf{F} = -\text{grad}U$  é detta *velocit  di fuga* (se  $r_i$  é la distanza tra il corpo e il centro di forza al momento dell'applicazione della forza viva)

$$v_o = \sqrt{\frac{2U(r_i)}{m}} \quad (9)$$

Un corpo che arrivi da distanze siderali con energia cinetica sufficiente sarà solo leggermente perturbato dalla presenza del campo di forza, la sua orbita non sarà chiusa, ma aperta. Ci proponiamo ora di dimostrare che, come affermato nella prima sezione, la forma della traiettoria (e dunque il valore dell'eccentricità  $\epsilon$ ) dipende dal valore dell'energia di legame  $E$ , riprendendo quanto detto:

- se  $E < 0$  la traiettoria è un'ellisse
- se  $E = 0$  la traiettoria è una parabola
- se  $E > 0$  la traiettoria è un'iperbole

Riprendendo i risultati della precedente dimostrazione è stata ricavata la funzione  $\zeta(\theta) = \frac{K}{m\psi^2} + C \cos \theta$  e dunque  $\epsilon = m\psi^2 C / K$ . Volendo ricercare una relazione tra questi dati e il conseguente valore dell'energia di legame  $E$  sarà conveniente fare uso della (7)

$$\left(\frac{d\zeta}{d\theta}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{2}{\psi^2 m} \left(E + \int f(r) dr\right)$$

nella quale

$$\int f(r) dr = - \int \frac{K}{r^2} dr = \frac{K}{r} = K\zeta$$

Sostituendo l'espressione trovata per  $\zeta$  e la sua derivata

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = 0 + \frac{d}{d\theta} C \cos \theta = -C \sin \theta$$

si arriva a

$$C^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{K}{m\psi^2} + C \cos \theta\right)^2 = \frac{2E}{\psi^2 m} + \frac{2K}{\psi^2 m} \left(\frac{K}{m\psi^2} + C \cos \theta\right)$$

calcolando i quadrati

$$C^2 \sin^2 \theta + \frac{K^2}{m^2 \psi^4} + C^2 \cos^2 \theta + \frac{2K \cos \theta}{m\psi^2} = \frac{2E}{m\psi^2} + 2 \frac{K^2}{m^2 \psi^4} + \frac{2K \cos \theta}{m\psi^2}$$

riordinando l'equazione e sfruttando l'identità goniometrica si giunge a

$$C = \sqrt{\frac{2E}{m\psi^2} + \frac{K^2}{m^2 \psi^4}}$$

Non resta altro che esprimere l'eccentricità secondo la relazione trovata in precedenza

$$\epsilon = \frac{m\psi^2}{K} \sqrt{\frac{2E}{m\psi^2} + \frac{K^2}{m^2 \psi^4}} = \sqrt{\frac{m^2 \psi^4}{K^2} \left(\frac{K^2}{m^2 \psi^4} + \frac{2E}{m\psi^2}\right)}$$

ovvero

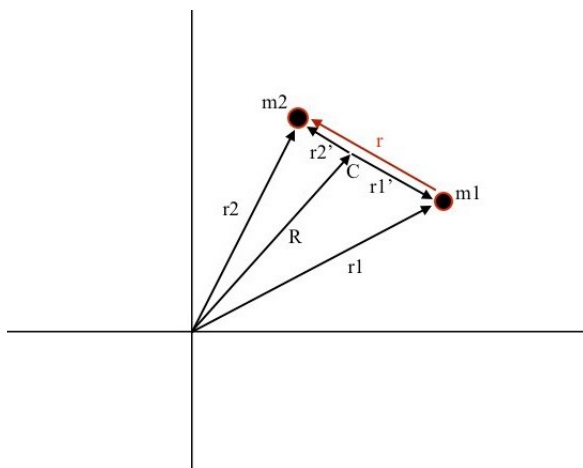
$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E m\psi^2}{K^2}} \quad (10)$$

Ora appare chiaro che per  $E < 0$  allora  $\epsilon < 1$  e dunque la traiettoria é un'ellisse, se  $E = 0$  l'eccentricit  e pari ad uno e si ha una parabola, mentre se  $E > 0$  sar   $\epsilon > 1$  ottenendo una traiettoria iperbolica. Un caso particolare é rappresentato da

$$E = -\frac{K^2}{2m\psi^2}$$

per il quale si ottiene una circonferenza, ovvero una traiettoria di eccentricit   $\epsilon = 0$ .

Occorre far luce sul significato e sul reale valore dei risultati ottenuti nelle ultime sezioni. Anzitutto si noti come il problema del moto sia stato notevolmente semplificato per fini analitici: il centro di forza, o generatore della forza, é stato assunto fisso in un punto dello spazio, trascurandone la dinamica; sono state trascurate le interazioni con altre sorgenti o altri corpi di qualsivoglia tipo; sono state considerate forze inversamente proporzionali esclusivamente al quadrato della distanza dal centro di forza (si noti che se cos  non fosse la (6) diverrebbe un'equazione non lineare); il valore di  $\psi$  (numericamente corrispondente a  $\frac{L}{m}$  se  $L$  é il momento angolare) rimane comunque indeterminato. Nelle sezioni seguenti si tratter  il problema del moto reciproco tra due corpi sottoposti ad interazione a distanza. In questo caso sar  necessario considerare la massa ridotta del sistema e il moto intorno al centro di massa  $C$  del sistema.



Per definizione

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

dunque

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_1 - m_1\mathbf{r}_1 - m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2}$$

Ora, siccome  $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r} = \mathbf{r}_2$  si ha  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}$  e definendo la massa ridotta del sistema come

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

si ottiene

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{\mu}{m_1} \mathbf{r}$$

Viceversa si avrà

$$\mathbf{r}'_2 = \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r}$$

Secondo queste considerazioni, ora l'energia cinetica del sistema dovrà tenere conto del moto del centro di massa. Se considerato rispetto all'origine del sistema inerziale il baricentro C si muove con velocità  $\dot{R}$ , per il Teorema di Koenig

$$K = K_{CM} + K_1 + K_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{r}'_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}'_2{}^2$$

ovvero

$$K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}m_1\frac{\mu^2}{m_1^2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{\mu^2}{m_2^2}\dot{r}^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\dot{r}^2$$

che é riscrivibile come

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$$

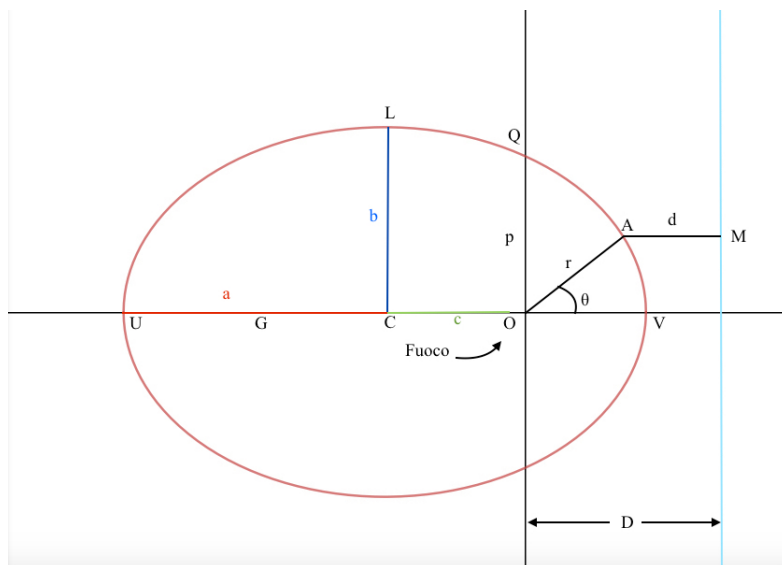
dove  $\mathbf{r}$  é la distanza relativa tra le due masse, che é ciò che ci interessa. Il problema é dunque ridotto a quello di un unico corpo di massa ridotta  $\mu$  il quale si muove con un'accelerazione che é data dalla risultante delle accelerazioni relative

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}}{\mu}$$

dal momento che per la terza legge di Newton é  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ .

## 4 La gravitazione

Sulla scia delle neonate speculazioni Copernicane, Keplero trovó la chiave giusta per un'interpretazione metodica degli archivi astronomici al tempo disponibili. In base ai suoi dati non solo riuscí a confermare la teoria del polacco, ma anche a determinare di che tipo di traiettoria si trattasse: egli giudicó che i pianeti si muovessero su traiettorie ellittiche, aventi il sole in uno dei due fuochi.



Facendo uso di (1) si nota che  $r(0) = \overline{OV} = \frac{p}{1 + \epsilon}$  mentre  $r(\pi) = \overline{OU} = \frac{p}{1 - \epsilon}$ . Ora si definisce il semiasse maggiore  $\overline{CV} = a$  tale che  $\overline{OV} + \overline{OU} = 2a$  ovvero

$$\frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon} = 2a$$

$$\frac{p(1 - \epsilon) + p(1 + \epsilon)}{(1 + \epsilon)(1 - \epsilon)} = 2a$$

sviluppando i calcoli

$$\frac{p - p\epsilon + p + p\epsilon}{1 - \epsilon^2} = \frac{2p}{1 - \epsilon^2} = 2a$$

si ottiene

$$p = a(1 - \epsilon^2)$$

Sostituendo dunque nella (1) si arriva a

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (11)$$

che é l'equazione dell'ellisse in funzione del suo semiasse maggiore. Ora, detta  $\overline{CO} = c$  ovvero

$$c = \overline{CV} - \overline{OV} = a - \frac{p}{1 + \epsilon} = a - a(1 - \epsilon) = a\epsilon$$

si definisce  $\overline{CL} = b$  come il semiasse minore. Essendo  $\overline{CL}$  un'asse di simmetria, dovrà essere  $\overline{OL} = \overline{GL}$ , e dalla definizione di ellisse  $\overline{OL} + \overline{GL} = 2a$  si ricava  $\overline{OL} = a$  arrivando alla relazione pitagorea (essendo l'angolo in C retto)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Sostituendo la relazione trovata in precedenza per  $c$  si arriva a

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$$

Una volta definita la forma della traiettoria, Keplero fu in grado di enunciare la sua seconda legge, detta *delle aree*: "il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali". Formalmente Keplero aveva giusto scoperto che la forza che governa l'interazione tra corpi celesti é di tipo centrale. Infatti ogni corpo sottoposto ad un campo di forza centrale si muove con una velocità areolare data da (4) riscritta piú comodamente

$$v_a = \frac{\psi}{2}$$

Un pianeta del sistema solare avente orbita ellittica con il Sole in uno dei due fuochi si muove di velocità areolare costante e compie una rivoluzione completa (ovvero il raggio vettore descrive un'area ellittica completa) in un periodo

$$T = \frac{A}{v_a} = \frac{\pi a b}{\psi/2}$$

Keplero li verificó dapprima empiricamente, tuttavia é chiaro come i risultati che seguono provengano armoniosamente dall'assunzione iniziale che il tipo di interazione sia inversamente proporzionale al quadrato della distanza. O meglio, per uno come Newton non dovette essere difficile incastrare i pezzi del Puzzle, giacché assumendo come traiettoria una conica, é immediato dimostrare che le equazioni differenziali viste nelle sezioni precedenti fanno in modo che si ottenga una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, risultato che poi Isaac Newton tramutó in legge universale. É stato infatti dimostrato come, per un corpo che si muove in un'ellisse di parametro  $p = a(1 - \epsilon^2)$  questo parametro assume il valore  $p = \frac{m\psi^2}{K}$  ovvero

$$\sqrt{1 - \epsilon^2} = \psi\sqrt{\frac{m}{aK}}$$

Sostituendo nella relazione per il semiasse minore

$$b = a\psi\sqrt{\frac{m}{aK}} = a^{1/2}\psi m^{1/2}K^{-1/2}$$

Pertanto

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}m^{1/2}}{\sqrt{K}}$$

elevando al quadrato e ponendo

$$\frac{4\pi^2 m}{K} = \varrho$$

con  $\rho$  avente il ruolo di costante di proporzionalità, si giunge a

$$T^2 = \rho a^3 \quad (12)$$

che è la *terza legge di Keplero*: "i quadrati dei tempi impiegati dai pianeti a percorrere le loro orbite sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite".

Uno scienziato talentuoso come Newton si trovava dunque circondato dai seguenti indizi: la forza misteriosa che costringe i pianeti al loro moto dovrà essere intuitivamente centrale (sarà dunque necessario azzerare la componente tangenziale dalle equazioni); i pianeti si muovono su ellissi con velocità costante (altro indizio a favore della centralità della forza); esiste una relazione tra periodi orbitali e distanza media pianeta-Sole. C'è da dire che sono state trascurate le interazioni reciproche tra pianeti e che si è considerato il centro di forza (il Sole) come praticamente statico, ovvero dotato di una massa spropositata se confrontata con quella degli altri corpi. Sviluppando i calcoli sui vettori com'è stato fatto nella sezione 1, facendo uso dell'equazione (6) e sostituendovi l'equazione parametrica dell'ellisse si ottiene dunque una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, attrattiva (con segno negativo). Riprendendo le osservazioni fatte alla fine della sezione 3, i due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$  si muovono con accelerazione relativa

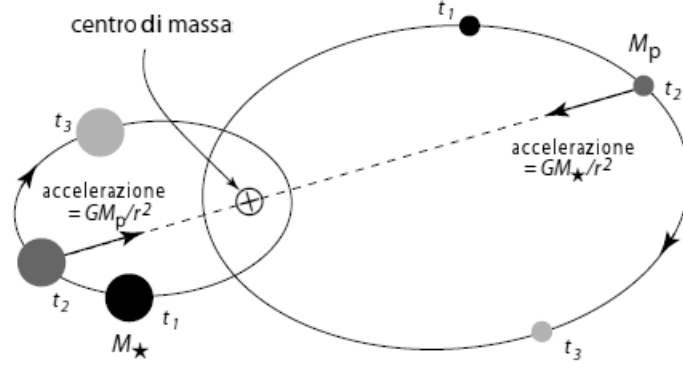
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}}{\mu}$$

se  $\mu$  è la massa ridotta del sistema, ricondotto al moto di un unico corpo. La reciproca interazione è data dalla legge di gravitazione universale

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (13)$$

L'universalità della formula fu giustificata da Newton nell'idea di uno spazio isotropo e nell'evidenza che tutti i fenomeni, nel nostro come nell'ultimo dei cieli, avvengono secondo i medesimi meccanismi. Come indica il versore, questa forza è evidentemente centrale ed ha una caratteristica fondamentale: è tale che l'accelerazione di un corpo ad essa soggetto non dipende dalla massa inerziale del corpo, com'è facilmente dimostrabile dalla seconda legge di Newton. Ciò generò numerosi dubbi e perplessità circa la distinzione tra massa inerziale e massa gravitazionale (la prima compare nella seconda legge della dinamica e indica la resistenza al moto di un corpo, la seconda riguarda l'attrazione gravitazionale che la massa in se è in grado di provocare). Oggi è verificato con grande precisione che il rapporto  $\frac{m_{iner}}{m_{grav}}$  è praticamente uguale a uno. Il valore della costante universale  $\gamma$  fu misurato da Cavendish nella sua celebre esperienza del 1798 ed oggi è noto essere pari a  $6.67 \times 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2}$ . Se questa costante possa essere univoca e inalterata in ogni angolo dell'universo è un quesito giustificabile. Oggi, seppur attrezzati con teorie ben più avanzate sulla gravità come la relatività generale, ci si è resi conto che non sempre gli astri rispondono perfettamente alle leggi a noi note. Certe perturbazioni sono state attribuite ad una sorta di *materia oscura* la quale altro non è che materia invisibile (ovvero non interagisce con la radiazione elettromagnetica), ma che tuttavia sarebbe la responsabile delle alterazioni sul moto di alcuni astri e galassie.

In definitiva i due corpi sottoposti a mutua interazione si muovono su ellissi aventi come fuoco il corrispondente centro di massa



Nel nostro sistema solare il centro di massa per l'interazione tra il Sole e gli altri pianeti è considerabile praticamente all'interno del Sole stesso (solo nel caso dell'interazione Sole-Giove il centro di massa giace, anche se di poco, al di fuori della stella).

Com'è noto, durante l'interazione concorrono due accelerazioni, necessariamente radiali (pertanto ometteremo i versori) dal momento che (13) è un campo di forza centrale, tale che l'accelerazione risultante è

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

dove  $\frac{d^2r}{dt^2}$  è l'accelerazione relativa tra i due corpi, applicata dalla forza gravitazionale. Ricordando che  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu}$  dove  $L$  è il momento angolare della massa  $\mu$  del sistema, riprendiamo i calcoli delle sezioni iniziali:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{dr}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2} \frac{L}{\mu r^2} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2} \right]$$

L'ultimo membro è riscrivibile, dato che  $\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$  nel modo seguente

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \left[ -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right)$$

Sostituendo nell'espressione dell'accelerazione

$$a = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{L^2}{\mu r^3}$$

riordinando i termini ed esprimendo il versore radiale otteniamo la *formula di Binet*

$$\mathbf{a} = -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \mathbf{u}_r \quad (14)$$



Moltiplicando la (14) per  $\mu$  si ottiene la (13) ovvero

$$-\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_r = -\frac{L^2}{\mu r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \mathbf{u}_r$$

Omettendo il versore, semplificando e riordinando i termini e imponendo  $\zeta = \frac{1}{r}$  si ottiene la (6)

$$\frac{d^2 \zeta}{d\theta^2} + \zeta = \gamma \mu \frac{m_1 m_2}{L^2} \quad (15)$$

Com'è stato dimostrato nella sezione 2, la (15) conduce ad una soluzione costante seguita da un termine del tipo  $C \cos \theta$ . Riscrivendo la (11) nella forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-\epsilon^2)} + \frac{\epsilon \cos \theta}{a(1-\epsilon^2)}$$

e confrontandola con la soluzione dell'equazione differenziale trovata nella sezione 2

$$\frac{1}{r} = \gamma \mu \frac{m_1 m_2}{L^2} + C \cos \theta$$

si ottiene la seguente corrispondenza

$$\frac{1}{a(1-\epsilon^2)} = \gamma \mu \frac{m_1 m_2}{L^2}$$

In definitiva si ricava l'espressione per il momento angolare di un corpo rappresentante l'interazione gravitazionale di un sistema avente massa ridotta  $\mu$

$$L^2 = \gamma \mu m_1 m_2 a(1-\epsilon^2) \quad (16)$$

La (16) non dice nulla di nuovo: in un campo di forze centrali il momento angolare è una costante. Considerando la (11) la distanza  $r(\pi)$  è detta, nel sistema solare, *afelio*; il corrispondente momento angolare è

$$L^2 = \gamma \mu m_1 m_2 a(1-\epsilon^2) = \mu^2 r^2 v^2 = \mu^2 \frac{a^2(1-\epsilon^2)^2}{(1-\epsilon)^2} v^2$$

dunque

$$\gamma m_1 m_2 = \mu a \frac{(1+\epsilon)}{(1-\epsilon)} v^2$$

La velocità tangenziale all'afelio (perpendicolare al raggio vettore) corrisponde a

$$v_a = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{a} \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}$$

Poiché nella maggior parte dei casi nel sistema solare la massa dei pianeti è trascurabile rispetto a quella  $M$  del sole, si ha semplicemente

$$v_a = \sqrt{\frac{\gamma M}{a} \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}$$

Del pari, laddove la distanza dal fuoco è  $r(0)$  (detta *perielio*) l'astro avrà una velocità orbitale

$$v_p = \sqrt{\frac{\gamma M}{a} \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}$$

In definitiva é comodo esprimere i rapporti tra le due velocità orbitali

$$\frac{v_p}{v_a} = \sqrt{\frac{(1 + \epsilon)^2}{(1 - \epsilon)^2}}$$

ovvero

$$\frac{v_p}{1 + \epsilon} = \frac{v_a}{1 - \epsilon}$$

Com'è facile verificare, la velocità sarà maggiore al perielio, dove la distanza dalla stella é minore, in virtù della conservazione del momento angolare.

Un'osservazione interessante riguardante l'energia di legame degli astri (ovvero per quelle orbite per le quali vale la (16)) é facilmente ricavabile operando sulla (10). Sostituendo i parametri con quelli ricavati per le interazioni gravitazionali (e la massa  $m$  con la massa ridotta  $\mu$ ) e riscrivendola nella forma

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{2E L^2}{\mu \gamma^2 m_1^2 m_2^2}$$

É possibile trasformare la (16) come segue

$$-(\epsilon^2 - 1) = \frac{L^2}{\gamma \mu m_1 m_2 a}$$

ovvero

$$-\frac{L^2}{\gamma \mu m_1 m_2 a} = \frac{2E L^2}{\mu \gamma^2 m_1^2 m_2^2}$$

Semplificando e riordinando si ottiene

$$E = -\gamma \frac{m_1 m_2}{2a} \tag{17}$$

La (17) vale per tutte le orbite ellittiche (infatti é sempre  $E < 0$ ), dipende solamente dalle masse che interagiscono e dal semiasse maggiore delle orbite. Questo risultato é molto importante: fissato un valore per  $E$  sono possibili tante ellissi di forme differenti (ovvero é fissato il semiasse maggiore ma non quello minore, e dunque non é fissata l'eccentricità, ragion per cui al variare dell'eccentricità varia necessariamente anche la (16), il momento angolare). Da qui si evince la totale indipendenza tra energia di legame dell'orbita e momento angolare orbitale.

## 5 Perturbazioni gravitazionali

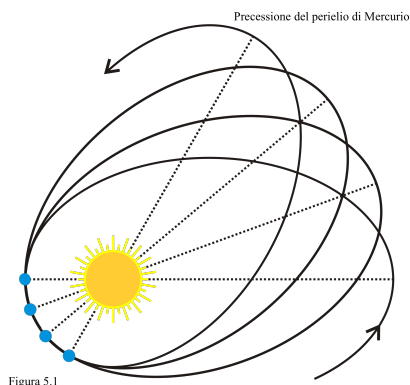
Le leggi di Keplero e di Newton sono valide solo in una prima approssimazione piuttosto idealizzata della realtà. Il moto e la traiettoria di un pianeta si ricavano considerando l'interazione pianeta-stella e trascurando le interazioni con gli altri pianeti, supponendo la stella fissa e non influenzata dalla reciproca attrazione (che equivale a supporre la stella di massa infinitamente più grande rispetto al pianeta, situazione tuttavia fedele alla realtà). Inoltre si dà per scontata una distribuzione di massa (all'interno degli involucri perfettamente sferici dei pianeti) con una densità completamente uniforme e pari a

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Nella realtà nulla di ciò è scontato: le distribuzioni di massa all'interno dei pianeti non sono uniformi, né i pianeti sono delle sfere perfette, né è possibile trascurare le reciproche interazioni. Con l'avvento dei metodi di Laplace, Lagrange e la costruzione di una più rigorosa meccanica celeste fu possibile, tra il 1700 e il 1900, affrontare le gravi difficoltà matematiche riscontrate nel problema dei tre corpi. Munendosi di tutto un'arsenale di tabelle approssimative e dati convenzionali, i fisici e gli astronomi furono in grado di predire il moto delle comete, prevedere alcune perturbazioni nel moto di queste e raffinare le tecniche sperimentali con nuovi telescopi, i quali portarono alla scoperta, nel 1781, del pianeta Urano.

Servendosi di ottiche via via più avanzate, con il passare degli anni il moto di Urano catturò l'interesse degli astronomi, in quanto sembrava non corrispondere con le predizioni della teoria newtoniana. Si arrivò ad un punto tale da dubitare dell'universalità della teoria stessa, finché il matematico e astronomo francese Urbain Le Verrier non si interessò al problema. Analizzando le anomalie sull'orbita di Urano e correlandole con le più moderne tecniche matematiche sulla teoria delle perturbazioni, Le Verrier dopo vari tentativi fu costretto a postulare l'esistenza di un nuovo pianeta, non ancora osservato, che offriva con il suo contributo gravitazionale l'effetto osservato empiricamente. Durante l'estate del 1846 il matematico rese noto agli osservatori astronomici europei che puntando il loro telescopio sulle coordinate da lui predette, sarebbero riusciti ad individuare un nuovo pianeta, responsabile del moto anomalo di Urano. All'osservatorio di Berlino, la notte del 23 settembre 1846, il pianeta fu realmente individuato, e a meno di un grado dalla posizione prevista dalla teoria di Le Verrier. Il pianeta fu battezzato Nettuno e l'impresa rappresenta una delle conquiste più grandi dell'intelletto umano: Le Verrier aveva scoperto il pianeta con nient'altro che la sua penna.

L'astronomo francese si occupò in seguito anche della *precessione del perielio di Mercurio*. Era noto infatti che, rispetto al sistema di riferimento inerziale ICFR il perielio del pianeta (supposto fisso nello spazio dalla teoria newtoniana) avanzava ogni secolo di  $574.10 \pm 0.65$  secondi d'arco. L'effetto era notevole e non trascurabile, ragion per cui, sulla scia dei recenti successi, fu fatto uso della teoria perturbativa al fine di tenere conto delle possibili influenze degli altri pianeti sull'orbita del pianeta più interno del sistema solare.



In figura l'effetto é ovviamente esagerato e rappresenta la precessione registrata nell'arco di numerosi secoli. Il tedioso lavoro di Le Verrier puó essere ragionevolmente approssimato senza tenere conto dell'evoluzione temporale delle altre orbite planetarie, ovvero ragionando in termini di *interazione media* tra pianeta esterno e Mercurio. Ciò puó essere fatto riducendo l'intero processo rivoluzionario assai complesso del pianeta ad un anello di materia avente come centro il sistema Sole-Mercurio (con quest'ultimo a distanza  $a$  dal centro, avente orbita mediamente circolare). Essendo  $R_i$  il raggio dell' $i$ -esimo anello rappresentante l' $i$ -esimo pianeta, la densità lineare media di massa in ciascuno di essi sarà

$$\lambda_i = \frac{M_i}{2\pi R_i}$$

Al fine di rendere l'interazione media quanto piú vicina alla realtà, il contributo di ciascun elemento lungo la circonferenza dell'anello non sarà supposto identico, al fine di tenere conto delle evoluzioni temporali nell'orbita del pianeta perturbante: in altre parole, se un'arco infinitesimo di anello fa le veci di una distribuzione di massa  $dm_1$  un'altro arco diverso dal primo avrà distribuzione  $dm_2$  diversa dalla prima (ad esempio se  $dm_2 > dm_1$  viene descritta una situazione in cui ad un certo momento della sua orbita il pianeta perturbante si trova piú vicino a Mercurio). Tuttavia queste distribuzioni agiranno simultaneamente e di conseguenza concorreranno (verrà dimostrato che la risultante é una forza repulsiva). Si osservi (e anche ciò verrà dimostrato) che anche la somma di tutti i contributi da parte dei pianeti del sistema solare é di diversi ordini di grandezza minore rispetto alla forza attrattiva tra il Sole e Mercurio, ciò rientra perfettamente nell'ipotesi che la perturbazione sia piuttosto piccola. Gli effetti di questa perturbazione si traducono in un moto oscillatorio degli apside di Mercurio rispetto alla situazione dell'orbita non perturbata. Se un apside é un punto fisso nello spazio per il quale il raggio vettore dell'orbita assume massimi e minimi (nel caso del sistema solare si parla dei valori  $r(\pi)$  e  $r(0)$ , rispettivamente afelio e perielio) allora é facile vedere che il raggio vettore, nell'orientarsi da un apside a quello immediatamente successivo spazzerá un'angolo ragionevolmente pari a  $\Psi = \pi$ . L'anomalia del problema sta proprio nella precessione del perielio di Mercurio che causa una differenza nei valori degli angoli spazzati tra i due apside rispetto alla situazione non perturbata. Si considerino gli elementini di massa  $dm_1 = \lambda ds_1$  e  $dm_2 = \lambda ds_2$  collocati ad una distanza rispettivamente  $l_1$  e  $l_2$  rispetto a Mercurio, tale che sia ovviamente  $ds_1 = l_1 d\beta$  e  $ds_2 = l_2 d\beta$  se  $d\beta$  é l'angolo infinitesimo sotteso dagli archi, secondo la figura 5.2.

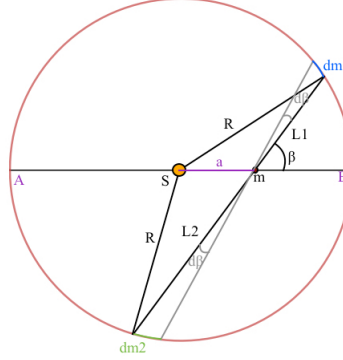


Figura 5.2

Le forze infinitesime agenti su Mercurio sono

$$d\mathbf{F}_1 = \gamma \frac{m dm_1}{l_1^2} \mathbf{u}_l = \gamma \frac{m \lambda ds_1}{l_1^2} \mathbf{u}_l = \gamma \frac{m \lambda d\beta}{l_1} \mathbf{u}_l$$

$$d\mathbf{F}_2 = \gamma \frac{m dm_2}{l_2^2} \mathbf{u}_l = \gamma \frac{m \lambda ds_2}{l_2^2} \mathbf{u}_l = \gamma \frac{m \lambda d\beta}{l_2} \mathbf{u}_l$$

se  $\mathbf{u}_l$  è un versore nella direzione di  $l_1$  e  $l_2$ . Poiché queste forze agiscono lungo direzioni opposte degli assi ortogonali (com'è facile dimostrare tramite componenti) la risultante sarà data dalla differenza

$$d\mathbf{F} = \gamma \frac{m \lambda d\beta}{l_1} \mathbf{u}_l - \gamma \frac{m \lambda d\beta}{l_2} \mathbf{u}_l = \gamma \lambda m \left( \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right) d\beta \mathbf{u}_l = \gamma \lambda m \left( \frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2} \right) d\beta \mathbf{u}_l$$

Per la simmetria del problema ciascuna componente verticale lungo l'integrazione finisce per annullarsi, pertanto la risultante è puramente orizzontale, ovvero

$$d\mathbf{F} = dF \cos \beta \mathbf{u}_r = \gamma \lambda m \left( \frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2} \right) \cos \beta d\beta \mathbf{u}_r \quad (18)$$

se  $\mathbf{u}_r$  è un versore nella direzione radiale (il tipo di forza è ovviamente centrale). Dalla figura 5.2 è possibile esprimere le distanze  $l_1$  e  $l_2$  in termini di  $R$ ,  $a$  e  $\beta$  dalla immediata relazione

$$R^2 = a^2 + l_1^2 - 2l_1 a \cos(\pi - \beta) = a^2 + l_1^2 + 2l_1 a \cos \beta$$

La retta AB, in quanto tagliata da una trasversale, fa sì che anche l'angolo tra  $l_2$  e AB sia  $\beta$ , ricavando

$$R^2 = a^2 + l_2^2 - 2l_2 a \cos \beta$$

Calcolando le radici dell'equazione di secondo grado in  $l_1$  si trova

$$l_1 = -a \cos \beta \pm [a^2 \cos^2 \beta - (a^2 - R^2)]^{1/2}$$

Siccome per  $\beta = 0$  deve essere  $l_1 = R - a$ , si sceglie la soluzione positiva. Del pari si ha per  $l_2$

$$l_2 = a \cos \beta \pm [a^2 \cos^2 \beta - (a^2 - R^2)]^{1/2}$$

anche in questo caso per  $\beta = \pi$  deve essere  $l_2 = R - a$  ed é pertanto necessario scegliere la soluzione positiva. Ora

$$l_2 - l_1 = a \cos \beta + [a^2 \cos^2 \beta - (a^2 - R^2)]^{1/2} - (-a \cos \beta + [a^2 \cos^2 \beta - (a^2 - R^2)]^{1/2}) = 2a \cos \beta$$

mentre

$$l_1 l_2 = ([a^2 \cos^2 \beta - (a^2 - R^2)]^{1/2} - a \cos \beta)([a^2 \cos^2 \beta - (a^2 - R^2)]^{1/2} + a \cos \beta) = a^2 \cos^2 \beta - (a^2 - R^2) - a^2 \cos^2 \beta$$

dunque

$$l_1 l_2 = R^2 - a^2$$

Sostituendo queste relazioni nella (18) si giunge a

$$d\mathbf{F} = \frac{2\gamma\lambda m a}{R^2 - a^2} \cos^2 \beta d\beta \mathbf{u}_r$$

Al fine di coprire tutti i contributi della circonferenza, si integra per  $0 \leq \beta \leq \pi$

$$\mathbf{F} = \frac{2\gamma\lambda m a}{R^2 - a^2} \int_0^\pi \cos^2 \beta d\beta$$

Ora, dal momento che  $\cos(\beta + \beta) = \cos \beta \cos \beta - \sin \beta \sin \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = \cos(2\beta)$  é facile vedere che  $\cos^2 \beta = 1/2[1 + \cos(2\beta)]$ .

L'integrale diviene

$$\int_0^\pi \cos^2 \beta d\beta = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\beta + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2\beta) d\beta$$

Il primo termine del secondo membro é banalmente pari a  $\pi/2$ , per il secondo é sufficiente operare la sostituzione  $2\beta = u$  dunque  $d\beta = du/2$  e quindi cambiare i limiti di integrazione  $0 \leq u/2 \leq \pi$  ottenendo

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(u) du = \frac{1}{2} [\sin(2\pi) - \sin(0)] = 0$$

Si evince infine che

$$\int_0^\pi \cos^2 \beta d\beta = \frac{\pi}{2}$$

Per la forza media totale esercitata dal pianeta esterno su Mercurio si ottiene la seguente espressione

$$\mathbf{F} = \gamma\pi\lambda m \frac{a}{R^2 - a^2} \mathbf{u}_r \quad (19)$$

Dove si ricorda che  $a$  é il raggio medio dell'orbita di Mercurio, approssimata ad un'orbita circolare (nella realtà tuttavia Mercurio é il pianeta piú eccentrico, tuttavia é stato preso in considerazione il suo semiasse maggiore) mentre  $R$  é il raggio medio dell'orbita del pianeta. Si noti che la (19) é una forza centrale repulsiva, in quanto  $R^2 - a^2 > 0$ , e dal momento che Mercurio é il pianeta piú interno, l'ultima relazione é sempre verificata. Nella tabella 5a sono classificati i piú importanti dati orbitali che stiamo tenendo in considerazione, tra cui la densità lineare di massa  $\lambda$ .

Numero del pianeta	Pianeta	R(10 <sup>11</sup> m)	$\lambda(10^{12} \text{ kg m}^{-1})$
1	Mercurio	0,579	---
2	Venere	1,082	7,159
3	Terra	1,496	6,353
4	Marte	2,279	0,448
5	Giove	7,785	388,027
6	Saturno	14,335	6,309

Tabella 5a

Per tenere conto delle perturbazioni di tutti i pianeti del sistema solare (eccezion fatta per Urano e Nettuno, poiché ragionevolmente troppo lontani) si estende a sommatoria la (19)

$$\mathbf{F}(a) = \gamma \pi m \sum_{i=2}^6 \lambda_i \frac{a}{R_i^2 - a^2} \mathbf{u}_r \quad (20)$$

D'altra parte su Mercurio agisce la forza di attrazione del Sole

$$\mathbf{F}_o = -\gamma \frac{m M}{r^2} \mathbf{u}_r = -1.306 \cdot 10^{22} N$$

anch'essa radiale.

L'equazione radiale del moto di Mercurio sarà dunque data dalla (2)

$$\Phi(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

dove  $\Phi(r)$  è la forza totale agente. Come sappiamo, l'ultima equazione è altresì riscrivibile in termini del momento angolare  $L$

$$\Phi(r) = m\ddot{r} - \frac{L^2}{m r^3} \quad (21)$$

Se l'orbita è circolare ( $r = a = \text{costante}$  rispetto al tempo) la (21) si riduce a

$$\Phi(a) = -\frac{L^2}{m a^3}$$

secondo il modello ad anelli lo spostamento di Mercurio da quest'orbita provocherà un'oscillazione attorno al punto  $r = a$  tale che, denominando  $\chi$  la perturbazione infinitesima, si ha  $r = \chi + a$  con  $\chi \ll a$ . Sostituendo questa espressione per  $r$  nella (21) si ha

$$\Phi(\chi + a) = m \frac{d^2}{dt^2}(\chi + a) - \frac{L^2}{m}(\chi + a)^{-3}$$

riscrivibile, volendo esprimere il rapporto tra  $\chi$  e  $a$ , nella forma equivalente

$$\Phi(\chi + a) = m\ddot{\chi} - \frac{L^2}{m a^3} \left(1 + \frac{\chi}{a}\right)^{-3}$$

Dal momento che  $\chi \ll a$  entrambi i membri dell'ultima equazione sono approssimabili con sviluppo in serie di Taylor al contorno di  $r = a$  trascurando i termini superiori al prim'ordine. Se  $f(\chi) = \Phi(\chi + a)$

$$f(\chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \chi^n$$

Per  $n = 0$  si ha  $f^{(0)}(0) = \Phi(\chi + a)_{\chi=0} = \Phi(a)$ , per  $n = 1$   $f'(0) = \Phi'(0 + a)\chi^1$  dunque é possibile affermare che

$$\Phi(\chi + a) \approx \Phi(a) + \Phi'(a)\chi$$

Invece, detta  $f(\chi) = (1 + \frac{\chi}{a})^{-3}$  é possibile utilizzare in maniera del tutto equivalente lo sviluppo in serie o l'espansione binomiale  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$  dal momento che necessitiamo solo del prim'ordine. Pertanto

$$\left(1 + \frac{\chi}{a}\right)^{-3} \approx 1 - 3\frac{\chi}{a}$$

Sostituendo all'equazione originale

$$\Phi(a) + \Phi'(a)\chi = m\ddot{\chi} - \frac{L^2}{m a^3} \left(1 - 3\frac{\chi}{a}\right)$$

Ora, dal momento che  $\frac{L^2}{m a^3} = -\Phi(a)$  avremo

$$\Phi(a) + \Phi'(a)\chi = m\ddot{\chi} + \Phi(a) - 3\Phi(a)\frac{\chi}{a}$$

Semplificando e riordinando i termini in  $\chi$  si ottiene la seguente equazione

$$\ddot{\chi} + \frac{1}{m} \left[ -3\frac{\Phi(a)}{a} - \Phi'(a) \right] \chi = 0 \quad (22)$$

Se il termine all'interno della parentesi nella (22) é positivo, l'equazione é quella di un oscillatore armonico e l'orbita é stabile, altrimenti la soluzione é esponenziale e l'orbita é instabile. Seguendo la prima assunzione, la pulsazione della (22) sará

$$\omega = \left( \frac{-3\frac{\Phi(a)}{a} - \Phi'(a)}{m} \right)^{1/2} = \frac{2\pi}{T}$$

dunque l'oscillazione avrá periodo

$$T = 2\pi \left( \frac{m}{-3\frac{\Phi(a)}{a} - \Phi'(a)} \right)^{1/2}$$

Poiché abbiamo supposto che l'oscillazione avvenga attorno alla posizione di equilibrio stabile (equivalente ad un'orbita circolare di raggio  $r = a$ ) il tempo orbitale necessario affinché il raggio vettore incontri due apsidi successivi corrisponde al semiperiodo dell'oscillazione

$$\tau = \pi \left( \frac{m}{-3\Phi(a)/a - \Phi'(a)} \right)^{1/2} \quad (23)$$



In questo frangente temporale il raggio vettore spazzerá un'angolo  $\Psi = \tau\dot{\theta}$

$$\Psi = \pi \left( \frac{m}{-3\Phi(a)/a - \Phi'(a)} \right)^{1/2} \left( \frac{L}{m a^2} \right)$$

Come sappiamo però  $L = \sqrt{-\Phi(a)m a^3}$  sostituendo questa espressione

$$\Psi = \pi \left( \frac{m}{-3\Phi(a)/a - \Phi'(a)} \right)^{1/2} \left( \frac{(-\Phi(a)m a^3)^{1/2}}{(m^2 a^4)^{1/2}} \right)$$

si giunge a

$$\Psi = \pi \left[ \frac{\Phi(a)}{3\Phi(a) + a\Phi'(a)} \right]^{1/2}$$

riscrivibile nella forma equivalente

$$\Psi = \pi \left[ \frac{1}{3 + a\Phi'(a)/\Phi(a)} \right]^{1/2}$$

ovvero

$$\Psi = \pi [3 + a\Phi'(a)/\Phi(a)]^{-1/2} \quad (24)$$

Non resta che determinare il rapporto  $a\Phi'(a)/\Phi(a)$  dove  $\Phi(a)$  rappresenta la forza totale che permette l'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio dell'orbita circolare

$$\Phi(a) = F_o + F(a) \quad (25)$$

dove  $F_o$  é la forza di attrazione tra Mercurio e il Sole, mentre  $F(a)$  é la (20). Pertanto

$$\Phi'(a) = F'_o + F'(a) \quad (26)$$

dove

$$F'_o = -\frac{d}{da} \gamma \frac{m M}{a^2} = \frac{2\gamma m M}{a^3}$$

Volendo esprimere il rapporto tra l'incremento della forza in percentuale si ha

$$\frac{F'_o}{F_o} = -2 \frac{\gamma m M}{a^3} \frac{a^2}{\gamma m M} = -\frac{2}{a}$$

ottenendo

$$F'_o = -\frac{2F_o}{a}$$

D'altra parte

$$F'(a) = \gamma \pi m \sum_{i=2}^6 \lambda_i \frac{d}{da} \frac{a}{R_i^2 - a^2} = \gamma \pi m \sum_{i=2}^6 \lambda_i \frac{d/da(a)[R_i^2 - a^2] - a[d/da(R_i^2) - d/da(a^2)]}{(R_i^2 - a^2)^2}$$

Ricordando che  $R$  é una costante si giunge a

$$F'(a) = \gamma \pi m \sum_{i=2}^6 \lambda_i \frac{R_i^2 + a^2}{(R_i^2 - a^2)^2}$$

Per necessità logistiche é conveniente porre

$$\Gamma = \sum_{i=2}^6 \lambda_i \frac{R_i^2 + a^2}{(R_i^2 - a^2)^2}$$

in modo che

$$F'(a) = \gamma \pi m a \Gamma$$

L'espressione (26) diviene

$$a\Phi'(a) = -2F_o + \gamma \pi m a \Gamma$$

Sostituendo i risultati trovati nella (24)

$$\Psi = \pi \left[ 3 + \frac{-2F_o + \gamma \pi m a \Gamma}{F_o + F(a)} \right]^{-1/2}$$

Riarrangiando i termini

$$\Psi = \pi \left[ \frac{3(F_o + F(a)) - 2F_o + \gamma \pi m a \Gamma}{F_o + F(a)} \right]^{-1/2} = \pi \left[ \frac{F_o + 3F(a) + \gamma \pi m a \Gamma}{F_o + F(a)} \right]^{-1/2}$$

Si raccoglie a numeratore e denominatore il termine  $1/F_o$

$$\Psi = \pi \left[ \frac{1 + (3F(a) + \gamma \pi m a \Gamma)/F_o}{1 + F(a)/F_o} \right]^{-1/2}$$

e dunque

$$\Psi = \pi \left[ 1 + \frac{3F(a) + \gamma \pi m a \Gamma}{F_o} \right]^{-1/2} \left[ 1 + \frac{F(a)}{F_o} \right]^{1/2} \quad (27)$$

Convieni ora fare una precisazione sugli ordini di grandezza delle forze in gioco. Utilizzando i dati della tabella 5a (i quali sono tuttavia approssimati a tre cifre dopo lo zero, per non appesantire la trattazione i dati saranno riportati integralmente nell'appendice) é possibile stimare la forza totale perturbativa dei pianeti esterni, e secondo la (20) questa ammonta a

$$F(a) = 7.511 \cdot 10^{15} N$$

mentre la forza esercitata dal Sole su Mercurio vale, come detto

$$F_o = -1.306 \cdot 10^{22} N$$

ed é dunque in valore assoluto almeno  $10^7$  volte piú intensa rispetto a  $F(a)$ . In linea con ciò sará conveniente arrestare lo sviluppo della (27) al primo ordine in  $F(a)/F_o$ . Si osservi che nella forma corrente (21) é immediata l'espansione binominale  $(1+x)^n \approx 1+nx$  per entrambi i termini, ovvero

$$\Psi = \pi \left( 1 - \frac{3F(a) + \gamma \pi m a \Gamma}{2F_o} \right) \left( 1 + \frac{F(a)}{2F_o} \right)$$

Eseguendo la moltiplicazione indicata e trascurando i termini di secondo ordine giungiamo infine a

$$\Psi = \pi \left[ 1 - \frac{F(a)}{F_o} - \frac{\gamma \pi m a \Gamma}{2F_o} \right] \quad (28)$$

Si osservi che il termine all'interno della parentesi nella (28) é positivo in ogni caso, in quanto  $F_o$  é negativa. Note le altre forze, non resta che determinare la somma  $\Gamma$  che eseguiamo di seguito per ciascun pianeta, in quanto  $\Gamma = \Gamma_{Venere} + \Gamma_{Terra} + \dots + \Gamma_i$  servendoci sempre della tabella 5a. Per Venere

$$\Gamma_2 = 7.159 \cdot 10^{12} \frac{(1.082 \cdot 10^{11})^2 + (0.5791 \cdot 10^{11})^2}{[(1.082 \cdot 10^{11})^2 - (0.5791 \cdot 10^{11})^2]^2} = 1.544 \cdot 10^{-9} kg m^{-3}$$

La Terra contribuisce con

$$\Gamma_3 = 6.353 \cdot 10^{12} \frac{(1.496 \cdot 10^{11})^2 + (0.5791 \cdot 10^{11})^2}{[(1.496 \cdot 10^{11})^2 - (0.5791 \cdot 10^{11})^2]^2} = 4.517 \cdot 10^{-10} kg m^{-3}$$

e Marte

$$\Gamma_4 = 0.448 \cdot 10^{12} \frac{(2.279 \cdot 10^{11})^2 + (0.5791 \cdot 10^{11})^2}{[(2.279 \cdot 10^{11})^2 - (0.5791 \cdot 10^{11})^2]^2} = 1.049 \cdot 10^{-11} kg m^{-3}$$

dunque Giove

$$\Gamma_5 = 388.027 \cdot 10^{12} \frac{(7.785 \cdot 10^{11})^2 + (0.5791 \cdot 10^{11})^2}{[(7.785 \cdot 10^{11})^2 - (0.5791 \cdot 10^{11})^2]^2} = 6.508 \cdot 10^{-10} kg m^{-3}$$

e infine Saturno

$$\Gamma_6 = 63.099 \cdot 10^{12} \frac{(14.335 \cdot 10^{11})^2 + (0.5791 \cdot 10^{11})^2}{[(14.335 \cdot 10^{11})^2 - (0.5791 \cdot 10^{11})^2]^2} = 3.085 \cdot 10^{-11} kg m^{-3}$$

Sommando tutti i termini (per non appesantire la trattazione il calcolo dettagliato senza approssimazioni decimali é riportato nell'appendice) si ottiene il contributo totale

$$\Gamma = 2.688425214 \cdot 10^{-9} kg m^{-3}$$

Noto che la massa di Mercurio é  $3.3011 \cdot 10^{23} kg$  é possibile ora calcolare completamente la (28) ottenendo

$$\Psi = \pi[1 + 9.875444949 \cdot 10^{-7}]$$

Nell'arco di una rivoluzione attorno al Sole e in assenza di perturbazioni il raggio vettore di Mercurio spazzerebbe tra due apsi successivi un'angolo pari a  $2\pi$  nel suo periodo siderale  $P = 87.969$  giorni. In presenza delle perturbazioni il nuovo angolo spazzato differisce da quello ordinario di

$$\Omega = 2\Psi - 2\pi$$

Ciò é dovuto alla precessione del perielio, che ha un'avanzamento pari a

$$\Theta = \frac{\Omega}{P} = \frac{\pi(1.97508899 \cdot 10^{-6})}{87.969}$$

In un secolo vi sono  $365.256 \cdot 100$  giorni, dunque l'avanzamento secolare corrisponde (in radianti) a

$$\Theta_S = \frac{\pi(1.97508899 \cdot 10^{-6})}{87.969} 365.256 \cdot 100 = 2.576346336 \cdot 10^{-3} radianti/secolo$$

Convertendo il risultato in gradi sessadecimali si ha

$$\Theta_S = 0.1476137716 \text{ gradi/secolo}$$

e dunque in secondi d'arco moltiplicando per 3600

$$\Theta_S = 531.4095778'' \text{ arco/secolo}$$

Rispetto al valore sperimentale pari a  $574.10 \pm 0.65''$  lo scarto é di poco inferiore a  $43''$ . A suo tempo Le Verrier fu costretto, forte dei suoi recenti successi, a postulare l'esistenza di un nuovo pianeta non ancora osservato: il piú interno del sistema solare e difficilmente osservabile per via della sua vicinanza col sole, lo denominó Vulcano. Per anni numerosi astronomi ne dichiararono la scoperta, ma le osservazioni non coincidevano le une con le altre e la comunitá scientifica non riconobbe mai l'esistenza di Vulcano. Il problema finí quasi per passare in secondo piano dal momento che fu giudicato troppo dipendente da sensibilissimi errori di misura, errate stime delle masse planetarie e altri parametri orbitali, oltre al fatto che lo scarto di  $43''$  era considerato piuttosto insignificante (la punta di una matita su centinaia di metri) ed in effetti anche dal nostro calcolo ci si rende conto quanto siano importanti il numero di cifre decimali, oltre al fatto che i dati moderni sono sicuramente piú attendibili di quelli di un tempo. Albert Einstein agli inizi degli anni '10 del secolo scorso era alla ricerca di un nuovo modo di vedere la gravitá, la quale doveva rispondere delle osservazioni teoriche fatte dalla sua teoria della relativitá ristretta nel 1905. Un buon banco di prova gli si paró davanti nel 1915: ripescando un vecchio problema irrisolto dall'attuale teoria newtoniana come quello della precessione di Mercurio avrebbe non solo provato la sua nuova teoria della relativitá generale, ma anche risolto una questione che da quasi un secolo metteva a dura prova gli astronomi. Tralasciandone la derivazione (che esula dagli scopi della trattazione) la teoria della relativitá generale prevede la modifica dell'equazione del moto (15) con l'aggiunta di un termine

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta = \gamma\mu \frac{mM}{L^2} + \frac{3\gamma M}{c^2} \zeta^2 \quad (29)$$

L'equazione diviene dunque non lineare ed é risolvibile per approssimazioni successive. Come sappiamo la soluzione della (15) é del tipo

$$\zeta_o = A \cos(\theta - \theta_o) + \frac{1}{p} = \frac{Ap \cos(\theta - \theta_o) + 1}{p} = \frac{\epsilon \cos(\theta - \theta_o) + 1}{p}$$

dove  $p = L^2/\gamma M m\mu$ . Siccome il termine quadratico nella (29) é molto piccolo, si puó confondere  $\zeta \approx \zeta_o$  ovvero sostituendo

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta = \frac{1}{p} + \frac{3\gamma M}{c^2} \left[ \frac{\epsilon \cos(\theta - \theta_o) + 1}{p} \right]^2$$

Calcolando il quadrato di binomio e trascurando i seguenti termini molto piccoli:  $\frac{3\gamma M}{c^2 p^2}, \frac{3\gamma M}{c^2 p^2} \epsilon^2 \cos^2(\theta - \theta_o)$  si arriva a

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} + \zeta = \frac{1}{p} + \frac{6\gamma M}{c^2 p^2} \epsilon \cos(\theta - \theta_o)$$

Si opera ora la sostituzione

$$\zeta = \xi + \frac{1}{p}$$

ottenendo

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi + \frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{6\gamma M}{c^2 p^2} \epsilon \cos(\theta - \theta_o)$$

L'equazione assume la forma

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{6\gamma M}{c^2 p^2} \epsilon \cos(\theta - \theta_o)$$

dove, ricordando che  $\epsilon = A p$  e  $\zeta_o = 1/p + A \cos(\theta - \theta_o)$  si ha

$$\frac{\epsilon}{p} \cos(\theta - \theta_o) = A \cos(\theta - \theta_o) = \zeta_o - \frac{1}{p} \approx \xi$$

poiché è  $\xi = \zeta - 1/p$ . Sostituendo questa espressione si giunge infine all'equazione dell'oscillatore

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{6\gamma M}{c^2 p} \xi$$

ovvero, ponendo  $\Lambda^2 = 1 - \frac{6\gamma M}{c^2 p}$

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \Lambda^2 \xi = 0 \tag{30}$$

La soluzione della (30) è, com'è ormai noto

$$\xi = A \cos[\Lambda(\theta - \theta_o)]$$

e dunque

$$\zeta = \frac{1}{p} + A \cos[\Lambda(\theta - \theta_o)]$$

ottenendo l'equazione di una conica

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos[\Lambda(\theta - \theta_o)]} \tag{31}$$

Il raggio vettore di Mercurio descrive quindi una rivoluzione completa quando l'argomento del coseno nella (31) è pari a

$$\Lambda(\theta - \theta_o) = 2\pi$$

spazzando un'angolo

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\Lambda}$$

Questo angolo dunque differisce da quello spazzato normalmente ( $2\pi$ ) di una quantità

$$\Psi = \frac{2\pi}{\Lambda} - 2\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{6\gamma M}{c^2 p}}} - 2\pi$$

che rappresenta proprio l'avanzamento del perielio. Poiché il termine contenuto in  $\Lambda$  è molto piccolo, è possibile espandere il binomio fino al primo termine in maniera tale che

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{6\gamma M}{c^2 p}}} = 2\pi \left(1 - \frac{6\gamma M}{c^2 p}\right)^{-1/2} \approx 2\pi \left(1 + \frac{6\gamma M}{2c^2 p}\right)$$

Pertanto

$$\Psi = 2\pi \left(1 + \frac{6\gamma M}{2c^2 p}\right) - 2\pi = \frac{6\pi\gamma M}{c^2 p}$$

Siccome ora  $p = L^2/\gamma M m\mu$  dove  $L^2$  è dato dalla (16) si ricava

$$\Psi = \frac{6\pi\gamma M}{c^2 a(1 - \epsilon^2)} \quad (32)$$

Dove  $M$  è la massa del sole,  $c$  è la velocità della luce,  $a$  è il semiasse maggiore di Mercurio mentre  $\epsilon$  è la sua eccentricità orbitale (pari a 0.20563069). Calcolando si trova  $\Psi = 5.017080085 \cdot 10^{-7} \text{radianti}$  mentre per ogni rivoluzione (pari a 87.969 giorni)  $\Theta = 5.703236464 \cdot 10^{-9} \text{radianti/rivoluzione}$  e dunque in un secolo  $\Theta_S = 2.083141338 \cdot 10^{-4} \text{radianti/secolo}$  Convertendo il risultato in gradi  $\Theta_S = 1.193552068 \cdot 10^{-2} \text{gradi/secolo}$  e moltiplicando per 3600 si arriva infine a

$$\Theta_S = 42.96787444'' \text{ arco/secolo}$$

Che con buona approssimazione risolve il problema della precessione del perielio di Mercurio, poiché la somma dei valori teorici ricavati corrisponde ad un'avanzamento secolare del perielio di

$$\Theta_{Tot} = 574.3774522'' \text{ arco/secolo}$$

Valore notevolmente fedele a quello sperimentale (inoltre andrebbe aggiunto un contributo di  $0.0254''$  relativo al momento di quadrupolo dovuto al Sole). Il motivo per cui Mercurio è il pianeta maggiormente affetto da questa precessione è da attribuirsi specialmente alla sua vicinanza col sole (oltre al fatto di essere il pianeta più interno) poiché come ci è dato sapere dalla relatività generale lo spaziotempo nelle prossimità del Sole è particolarmente curvo, causando un lento capovolgimento dell'orbita nel corso dei secoli. Mercurio non è l'unico pianeta caratterizzato dall'avanzamento del perielio, tuttavia per gli altri pianeti l'avanzamento è minimo, o addirittura non è stato ancora possibile constatarlo poiché i periodi di rivoluzione dei giganti gassosi sono molto lunghi.

Matteo Parriciatu

## Appendice

Dati per i calcoli

*Mercurio* Massa =  $3.0311 \cdot 10^{23} \text{kg}$  Semiasse maggiore  $a = 5.791 \cdot 10^{10} \text{m}$

*Pianeta Venere*: Massa =  $4.8675 \cdot 10^{24} \text{kg}$  Semiasse maggiore  $R_2 = 1.0821 \cdot 10^{11} \text{m}$   
 $\lambda_2 = M_2/2\pi R_2 = 7.159104385 \cdot 10^{12} \text{kg/m}$  Forza perturbante tra Venere e Mercurio  $F_2 = \frac{m\gamma\pi\lambda_2 a}{R_2^2 - a^2} = 3.433103868 \cdot 10^{15} \text{N}$

*Pianeta Terra*  $M_3 = 5.9723 \cdot 10^{24} \text{kg}$  Semiasse maggiore  $R_3 = 1.49595 \cdot 10^{11} \text{m}$   
 $\lambda_3 = 6.35396281 \cdot 10^{12} \text{kg/m}$  Forza perturbante  $F_3 = 1.338246047 \cdot 10^{15} \text{N}$

*Pianeta Marte*  $M_4 = 0.64171 \cdot 10^{24} \text{kg}$  Semiasse maggiore  $R_4 = 2.27925 \cdot 10^{11} \text{m}$   
 $\lambda_4 = 4.480917781 \cdot 10^{11} \text{kg/m}$  Forza perturbante  $F_4 = 3.694728112 \cdot 10^{13} \text{N}$

*Pianeta Giove*  $M_5 = 1898.19 \cdot 10^{24} \text{kg}$  Semiasse maggiore  $R_5 = 7.7857 \cdot 10^{11} \text{m}$   
 $\lambda_5 = 3.880271799 \cdot 10^{14} \text{kg/m}$  Forza perturbante  $F_5 = 2.579255256 \cdot 10^{15} \text{N}$

*Pianeta Saturno*  $M_6 = 568.34 \cdot 10^{24} \text{kg}$  Semiasse maggiore  $R_6 = 1.433525 \cdot 10^{12} \text{m}$   
 $\lambda_6 = 6.309908816 \cdot 10^{13} \text{kg/m}$  Forza perturbante  $F_6 = 1.232366845 \cdot 10^{14} \text{N}$

Forza totale =  $F(a) = \sum_{i=2}^6 F_i = 7.510789137 \cdot 10^{15} \text{N}$  che é il valore non approssimato utilizzato per i calcoli nel testo.

Forza tra Sole e Mercurio  $M_{Sole} = 1988500 \cdot 10^{24} \text{kg}$   $F_o = -1.305969949 \cdot 10^{22} \text{N}$  che é il valore non approssimato utilizzato nel testo ai fini dei calcoli.

Valori della funzione  $\Gamma$   $\Gamma_2 = 1.544505839 \cdot 10^{-9} \text{kg/m}^3$   $\Gamma_3 = 4.51719063 \cdot 10^{-10} \text{kg/m}^3$   $\Gamma_4 = 1.049332946 \cdot 10^{-11} \text{kg/m}^3$   $\Gamma_5 = 6.508510045 \cdot 10^{-10} \text{kg/m}^3$   $\Gamma_6 = 3.085597766 \cdot 10^{-11} \text{kg/m}^3$  La somma di questi contributi conduce al valore totale mostrato nel testo.