

Sulla teoria dell'emissione elettronica a freddo

Nei primi decenni del novecento si iniziarono a studiare alcuni metodi di estrazione degli elettroni. Ad esempio era possibile provocare l'emissione elettronica dai metalli nei seguenti modi: per effetto termoionico scaldando tramite effetto Joule un filo di tungsteno; per effetto fotoelettrico facendo incidere su di un metallo dei fotoni altamente energetici. Nel 1922 Lilienfeld osservò che in determinate condizioni era possibile estrarre gli elettroni da un metallo applicando verso la sua superficie un intenso campo elettrico. Alcuni come Millikan, Lauritsen e Schottky cercarono subito una giustificazione teorica della frazione di elettroni estratti in funzione del campo applicato. Si constatò sperimentalmente che tale frazione doveva essere proporzionale alla quantità $e^{-\sigma/\Phi}$ essendo σ una costante caratteristica e Φ il campo elettrico applicato. Era noto da tempo infatti che nei metalli gli elettroni sono liberi di muoversi e che al fine di lasciare la superficie del metallo devono disporre di una certa energia detta "lavoro di estrazione". Con il progredire dei metodi della meccanica ondulatoria e della statistica di Fermi-Dirac si concluse che tale energia doveva essere comparabile alla differenza tra l'energia di Fermi caratteristica del metallo e l'energia nel vacuum subito al di fuori del metallo. Nell'effetto fotoelettrico questa energia era concessa dai fotoni γ altamente energetici, nell'effetto termoionico era concessa dall'agitazione termica. Il problema, com'è stato accennato, risiedeva nella difficoltà di predire la frazione di elettroni emessi date le condizioni iniziali. Per quanto intensi, l'energia elettrica messa a disposizione dai campi non era di per se tale da permettere agli elettroni liberi di oltrepassare la barriera energetica del metallo, eppure era possibile osservare l'emissione di correnti elettroniche anche a densità elevate. Facendo uso delle nuove teorie, sul finire degli anni 20 furono Fowler e Nordheim a formulare una descrizione soddisfacente del fenomeno. Scopo di questo articolo è quello di presentare un breve cenno di applicazione della meccanica ondulatoria a questo problema.

Le condizioni più favorevoli all'emissione elettronica per effetto di campo sono le seguenti:
come suggerisce il titolo, il metallo va tenuto ad una temperatura ordinaria, diversamente l'agitazione termica altererebbe il lavoro di estrazione e staremmo parlando di effetto termoionico; il campo elettrico applicato deve essere dell'ordine dei $10^6 V/m$; al fine di rilevare gli elettroni estratti l'esperimento deve essere svolto in condizioni di vuoto dell'ordine dei $10^{-10} Pa$, diversamente gli urti con le particelle di aria disperderebbero i risultati. Se si dispone delle tecniche per fare il vuoto necessario, questo metodo di estrazione fornisce dei fasci elettronici ad alta densità tra i 10^3 e $10^6 A/cm^2$ e dalle dimensioni di circa $10 nm$. A differenza dell'emissione termoionica non si deve tenere conto di un tempo limite di utilizzo del metallo (tale limite è dovuto al fatto che il metallo è portato al punto di fusione) e dunque l'estrazione può essere condotta su tempi relativamente estesi. Per via di questi risultati l'emissione a freddo è spesso utilizzata nei microscopi elettronici ad alta precisione, preferita al metodo termoionico. In prossimità della superficie del metallo gli elettroni sono vincolati da una bar-

riera di potenziale che può essere modellata dall'azione del campo elettrico per ottenere la seguente situazione schematica

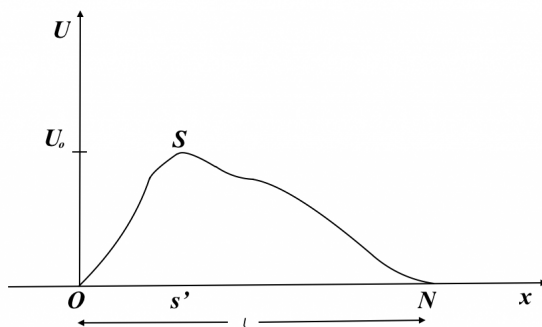


figura 1

Si analizzi ora il significato di questo schema: si osservi che essendo per definizione $F = -\frac{dU}{dx}$ e poiché $\frac{dU}{dx} > 0$ per $0 < x < s'$ e $\frac{dU}{dx} < 0$ per $x > s'$ gli elettroni saranno sottoposti ad una forza deceleratrice tra **O** e **s'** (dovuta al potenziale di estrazione del metallo) e ad una forza acceleratrice per $x > s'$ dovuta al campo elettrico. Consideriamo ora la regione tra **O** e **s'**. Come accennato, per via delle particolari configurazioni atomiche del reticolo metallico, in questa zona vi è una popolazione di elettroni che è possibile, ai fini analitici, considerare esenti da forze. Si potrebbe allora analizzare il problema considerando uno schema a barriera di potenziale, ignorando per il momento l'azione del campo elettrico.

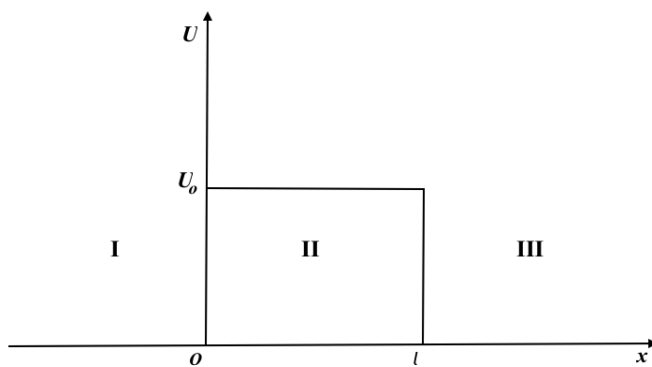


figura 2

Con questo schema si divide il problema in tre regioni e l'andamento del poten-

ziale é intervallato come segue

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ U_o & 0 < x < l \\ 0 & x > l \end{cases}$$

Il moto dell'elettrone in ciascuna regione sar  descritto dall'equazione di Schrodinger. Assumeremo ad esempio che l'elettrone arrivi da sinistra. Consideriamo la prima regione: ivi l'elettrone   libero e dunque la sua energia totale   semplicemente la sua energia cinetica E (caso non relativistico).

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0$$

Ponendo ora

$$k = \sqrt{\frac{2m E}{\hbar^2}}$$

com'  noto l'equazione ha come soluzione generale

$$\Psi_1 = A_1 e^{i k x} + B_1 e^{-i k x}$$

la quale descrive dei moti oscillatori di ampiezze A_1 e B_1 (rispettivamente un'onda progressiva e un'onda regressiva). Nella seconda regione l'elettrone risente di un potenziale U_o e l'equazione di Schrodinger  

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_o) \Psi = 0$$

che ponendo

$$k_o = \sqrt{\frac{2m (E - U_o)}{\hbar^2}}$$

ha soluzione

$$\Psi_2 = A_2 e^{i k_o x} + B_2 e^{-i k_o x}$$

La terza regione   analoga alla prima, dunque avr  soluzione

$$\Psi_3 = A_3 e^{i k x} + B_3 e^{-i k x}$$

Affinch  queste soluzioni abbiano significato fisico, dobbiamo tenere conto del fatto che l'elettrone viaggia da sinistra verso destra, dunque non dovranno essere presenti onde che viaggiano da destra verso sinistra nella terza regione, motivo per cui dovremo porre $B_3 = 0$. Non possiamo fare le medesime considerazioni anche per la prima e la seconda regione dal momento che a seconda dell'energia iniziale E dell'elettrone questi avr  una certa ampiezza di probabilit  di essere riflesso dalla barriera, anche all'interno della barriera stessa. In sintesi abbiamo che

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_1 e^{i k x} + B_1 e^{-i k x} & x < 0 \\ A_2 e^{i k_o x} + B_2 e^{-i k_o x} & 0 < x < l \\ A_3 e^{i k x} & x > l \end{cases}$$

Sempre per preservarne il significato fisico, dovremo impostare le seguenti condizioni: $\Psi(x)$ deve essere continua nei punti sospetti $x = 0, x = l$ insieme alla sua derivata. Pertanto otteniamo la serie di equazioni

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \Psi(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \Psi(x) \\ \lim_{x \rightarrow l^-} \Psi(x) &= \lim_{x \rightarrow l^+} \Psi(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \Psi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \Psi'(x) \\ \lim_{x \rightarrow l^-} \Psi'(x) &= \lim_{x \rightarrow l^+} \Psi'(x)\end{aligned}$$

che conducono al sistema

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ (A_1 - B_1)k = k_o(A_2 - B_2) \\ A_2 e^{i k_o l} + B_2 e^{-i k_o l} = A_3 e^{i k l} \\ A_2 i k_o e^{i k_o l} - B_2 i k_o e^{-i k_o l} = A_3 i k e^{i k l} \end{cases}$$

Operando le dovute semplificazioni e ponendo la sostituzione

$$\varrho = \frac{k_o}{k} = \sqrt{1 - \frac{U_o}{E}}$$

otteniamo

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ A_1 - B_1 = \varrho(A_2 - B_2) \\ A_2 e^{i k_o l} + B_2 e^{-i k_o l} = A_3 e^{i k l} \\ A_2 e^{i k_o l} - B_2 e^{-i k_o l} = \frac{1}{\varrho} A_3 e^{i k l} \end{cases}$$

Queste relazioni tra le ampiezze di probabilità possono darci informazioni sulla frazione di elettroni che dalla prima regione viene trasmessa alla terza regione. Se A_1 é l'ampiezza di probabilità di un'elettrone in moto da sinistra verso destra nella prima regione, e A_3 é l'ampiezza di probabilità che un'elettrone si trovi oltre la barriera nella terza regione muovendosi sempre di moto progressivo, possiamo interpretare il quadrato del rapporto A_3^2/A_1^2 come un coefficiente di trasmissione dell'elettrone, o equivalentemente come una misura della frazione degli elettroni trasmessi, in percentuale. Il motivo per cui consideriamo esclusivamente il quadrato delle ampiezze é da attribuirsi al fatto che nelle espressioni calcolate sono presenti unità complesse, mentre le probabilità sono numeri reali. Sostituiamo B_1 in funzione di A_1, A_2 e B_2 nelle prime due equazioni per ottenere

$$A_1 = \frac{1}{2}A_2(1 + \varrho) + \frac{1}{2}B_2(1 - \varrho)$$

e per relazionare A_3 con A_1 sostituiamo B_2 e A_2 in funzione di A_3 nelle ultime due equazioni ottenendo rispettivamente

$$A_2 e^{i k_o l} = \frac{1 + \varrho}{2\varrho} A_3 e^{i k l}$$

$$B_2 e^{-i k_o l} = \frac{\varrho - 1}{2\varrho} A_3 e^{i k l}$$

che divengono

$$A_2 = \frac{1 + \varrho}{2\varrho} A_3 e^{i(k - k_o)l}$$

$$B_2 = \frac{\varrho - 1}{2\varrho} A_3 e^{i(k + k_o)l}$$

Sostituendo queste relazioni nell'espressione per A_1 otteniamo infine

$$A_1 = \frac{A_3}{4\varrho} e^{i k l} [(\varrho + 1)^2 e^{-i k_o l} - (\varrho - 1)^2 e^{i k_o l}] \quad (1)$$

Da questa equazione é piú semplice ricavare l'inverso del coefficiente di trasmissione

$$\frac{1}{\tau} = \frac{A_1^2}{A_3^2}$$

Ora bisogna distinguere i due possibili casi: che l'elettrone abbia energia $E > U_o$ e sia dunque in grado di oltrepassare la barriera, o che l'elettrone abbia energia $E < U_o$ perciò secondo la meccanica classica non dovrebbe essere in grado di presentarsi nella terza regione. Trattandosi degli elettroni nel metallo, il secondo caso é certamente quello di interesse. Essendo $E < U_o$ cambierà la definizione di k_o che ora diviene

$$k_o = \sqrt{\frac{-2m(U_o - E)}{\hbar^2}} = i\sqrt{\frac{2m(U_o - E)}{\hbar^2}} = i k'_o$$

e pertanto cambierà anche quella di ϱ

$$\varrho = \frac{k_o}{k} = \frac{i k'_o}{k} = i \varrho'$$

L'equazione (1) assume ora la forma

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{1}{4i\varrho'} e^{i k l} [(i\varrho' + 1)^2 e^{k'_o l} - (i\varrho' - 1)^2 e^{-k'_o l}] \quad (2)$$

Per calcolare

$$\frac{1}{\tau} = \frac{A_1^2}{A_3^2} = \frac{A_1 A_1^*}{A_3 A_3^*}$$

sará necessario moltiplicare la (2) per il suo complesso coniugato

$$\frac{A_1^*}{A_3^*} = \frac{1}{-4i\varrho'} e^{-i k l} [(-i\varrho' + 1)^2 e^{k'_o l} - (-i\varrho' - 1)^2 e^{-k'_o l}]$$

Pertanto

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{16\varrho'^2} [(i\varrho' + 1)^2 e^{k'_o l} - (i\varrho' - 1)^2 e^{-k'_o l}] \times [(-i\varrho' + 1)^2 e^{k'_o l} - (-i\varrho' - 1)^2 e^{-k'_o l}]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16\rho'^2} \left\{ [(1+i\rho')(1-i\rho')]^2 e^{2k'_o l} - (1+i\rho')^4 - (1-i\rho')^4 + [(1+i\rho')(1-i\rho')]^2 e^{-2k'_o l} \right\} \\
\frac{1}{\tau} &= \frac{1}{16\rho'^2} \left[(1+\rho'^2)^2 e^{2k'_o l} - (1+i\rho')^4 - (1-i\rho')^4 + (1+\rho'^2)^2 e^{-2k'_o l} \right] \\
\frac{1}{\tau} &= \frac{1}{16\rho'^2} \left[-(1+i\rho')^4 - (1-i\rho')^4 + (1+\rho'^2)^2 \left(e^{2k'_o l} + e^{-2k'_o l} \right) \right]
\end{aligned}$$

Ponendo $\alpha = 2k'_o$ riconosciamo nell'ultimo termine la definizione della funzione coseno iperbolico $\cosh(x)$

$$\cosh(\alpha l) = \frac{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}{2}$$

dunque avremo

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{16\rho'^2} \left[-(1+i\rho')^4 - (1-i\rho')^4 + 2(1+\rho'^2)^2 \cosh 2k'_o l \right]$$

Ora, abbiamo rispettivamente che

$$\begin{aligned}
(1+i\rho')^4 &= 1 - 6\rho'^2 + 4i\rho' + \rho'^4 - 4i\rho'^3 \\
(1-i\rho')^4 &= 1 - 6\rho'^2 - 4i\rho' + \rho'^4 + 4i\rho'^3
\end{aligned}$$

Semplificando qualche termine giungiamo a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau} &= \frac{1}{8\rho'^2} \left[-1 + 6\rho'^2 - \rho'^4 + (1+\rho'^2)^2 \cosh 2k'_o l \right] \\
\frac{1}{\tau} &= \frac{-1 + 6\rho'^2 - \rho'^4}{8\rho'^2} + \frac{(1+\rho'^2)^2}{8\rho'^2} \cosh 2k'_o l
\end{aligned}$$

Per ottenere un'espressione di facile utilizzo, operiamo ora il seguente artificio scomponendo $6\rho'^2$ come $8\rho'^2 - 2\rho'^2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau} &= \frac{8\rho'^2 - 1 - 2\rho'^2 - \rho'^4}{8\rho'^2} + \frac{(1+\rho'^2)^2}{8\rho'^2} \cosh 2k'_o l \\
&= \frac{8\rho'^2 - (1 + \rho'^4 + 2\rho'^2)}{8\rho'^2} + \frac{(1+\rho'^2)^2}{8\rho'^2} \cosh 2k'_o l
\end{aligned}$$

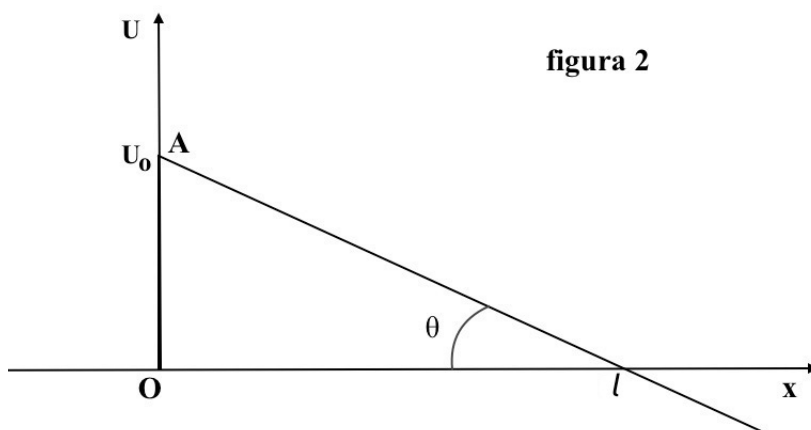
Riconosciamo che $1 + \rho'^4 + 2\rho'^2 = (1 + \rho'^2)^2$ allora arriviamo finalmente all'espressione

$$\frac{1}{\tau} = 1 + \frac{(1 + \rho'^2)^2}{8\rho'^2} (\cosh 2k'_o l - 1) \quad (3)$$

Da questa equazione possiamo notare che il coefficiente di trasmissione decresce al crescere dello spessore l della barriera, come ci si aspetterebbe. Notiamo soprattutto un risultato peculiare della meccanica ondulatoria: nonostante l'elettrone abbia energia $E < U_o$ ha comunque una probabilità non nulla di attraversare la barriera. Nella meccanica classica ciò sarebbe stato impossibile, dato che l'elettrone avrebbe energia cinetica $T = E - U_o < 0$ e dunque avrebbe una velocità immaginaria. Il paradosso si risolve facilmente se si tiene conto del fatto che l'elettrone, essendo un oggetto quantistico estremamente sensibile alle fluttuazioni energetiche dello spazio che lo circonda, risponde in maniera

diversa alle osservazioni sperimentali rispetto a un corpo macroscopico. Andando a misurare sperimentalmente la posizione dell'elettrone tra le tre regioni, gli si conferisce inevitabilmente in tale atto una certa energia che gli permette effettivamente di oltrepassare la barriera di potenziale.

Dopo questo accenno di teoria apprenderemo, almeno qualitativamente, il problema dell'emissione elettronica a freddo. Riprendendo lo schema illustrato in *figura 1* notiamo che possiamo ulteriormente approssimarlo ad un triangolo rettangolo, senza perdere molto in generalit . Si



Come detto in precedenza, questa forma particolare della barriera di potenziale   dovuta all'azione del campo elettrico, il quale esercita la forza di Coulomb sugli elettroni

$$F = q\Phi$$

essendo q la carica dell'elettrone e Φ l'intensit  del campo elettrico. Il coefficiente angolare di $U(x)$ nel tratto $0 \leq x \leq l$   dato da

$$m = \frac{U(l) - U(0)}{l - 0} = \frac{0 - U_0}{l} = -\frac{U_0}{l}$$

dove l   la lunghezza della barriera. Per definizione   per  $F = -\frac{dU}{dx}$ e allora

$$q\Phi = \frac{U_0}{l}$$

Da qui ricaviamo l'espressione per la lunghezza l della barriera

$$l = \frac{U_0}{q\Phi}$$

che andremo a sostituire nell'argomento del coseno iperbolico nella (3)

$$2k'_o l = \sqrt{\frac{8m(U_o - E)}{\hbar^2}} \frac{U_o}{q\Phi} = \frac{\sigma}{\Phi}$$

dove abbiamo introdotto il termine

$$\sigma = \sqrt{\frac{8m(U_o - E)}{\hbar^2}} \frac{U_o}{q}$$

Riscriviamo dunque la (3)

$$\frac{1}{\tau} = 1 + \frac{(1 + \varrho'^2)^2}{8\varrho'^2} [\cosh(\sigma/\Phi) - 1] \quad (4)$$

Notiamo che all'aumentare dell'intensità del campo elettrico aumenta la probabilità di emissione elettronica. Nella pratica la quantità σ/Φ assume valori piuttosto alti, tanto che tornando alla definizione di coseno iperbolico il termine in $e^{-\sigma/\Phi}$ può essere trascurato facendo prevalere

$$\cosh(\sigma/\Phi) \approx \frac{e^{\sigma/\Phi}}{2}$$

Sempre per questo motivo nella (4) è possibile trascurare l'unità rispetto ai valori elevati dell'esponenziale crescente. La (4) si approssima facilmente a

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(1 + \varrho'^2)^2}{16\varrho'^2} e^{\sigma/\Phi}$$

ed otteniamo l'espressione per la frazione di elettroni emessi

$$\tau = \frac{16\varrho'^2}{(1 + \varrho'^2)^2} e^{-\sigma/\Phi} \quad (5)$$

Il risultato di questo calcolo teorico ha una forma molto simile a quella predetta empiricamente. Si osservi in che modo il comportamento quantistico degli elettroni ha portato a questa conclusione: nonostante abbiano energia minore di quella necessaria, questi hanno comunque una probabilità non nulla di essere trasmessi; una volta oltrepassata la barriera vengono catturati dall'azione del campo elettrico che li costringe ad allontanarsi e ad essere rilevati. Ciò fa pensare che in assenza di campo elettrico ci sia comunque una popolazione di elettroni al di fuori della barriera di potenziale, ma che tale presenza possa essere evidenziata solamente conferendogli ulteriore energia per poterli rilevare lontano dal metallo.

Matteo Parriciatu