La deflessione della luce in un campo gravitazionale

La questione che la luce possa essere influenzata dalla gravitá circolava nella mente dello stesso Isaac Newton nel momento della formulazione della sua teoria universale. Henry Cavendish fu il primo a dare una stima quantitativa dell'eventuale deflessione di un raggio luminoso in presenza del campo gravitazionale di un astro, ma non pubblicó mai i suoi calcoli. Fu Joahnn von Soldner a pubblicare il calcolo dell'angolo di deviazione, agli inizi del XIX secolo. Egli consideró la luce secondo la teoria corpuscolare di Newton, calcolando l'orbita intorno al Sole di un corpo avente velocitá pari a quella della luce $c \approx 3\times 10^8 m/s$ e dunque energia cinetica $K = 1/2\, mc^2$ tanto elevata da sfuggire all'attrazione gravitazionale disegnando un'iperbole. Egli non ebbe bisogno di conoscere la massa della luce, poiché una delle accidentali implicazioni della teoria newtoniana risiede nell'equivalenza tra massa gravitazionale e massa inerziale, facendo sí che l'accelerazione di un corpo impressa dalla gravitá sia indipendente dalla sua massa. Soldner trovó, utilizzando i dati astronomici della sua epoca, il seguente risultato per l'angolo di deviazione (in secondi d'arco) $\Delta\varphi = 0.84''$ che utilizzando i dati odierni corrisponde a $\Delta\varphi = 0.875''$. Fu poi Albert Einstein a ripetere il calcolo nel 1911, pubblicando il risultato sugli Annalen der Physik. Egli dimostró che la velocitá della luce in presenza di un campo gravitazionale doveva essere funzione della sua distanza dal centro di gravitá. Applicó quindi il principio di Huygens al fronte d'onda della radiazione luminosa e consideró l'effetto della dilatazione temporale gravitazionale ottenendo infine, nel caso del Sole, lo stesso risultato di Soldner. Il calcolo di Einstein si basava peró su supposizioni diametralmente opposte a quelle di Soldner: conscio che i fotoni di luce non hanno massa, consideró la possibilitá di una loro deviazione partendo unicamente dal principio di equivalenza. Se consideriamo un ascensore in caduta libera all'interno di un campo gravitazionale uniforme e statico, l'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale permette che tutti i corpi all'interno dell'ascensore cadano con la sua stessa accelerazione, dando a questi la sensazione di fluttuare nel vuoto: l'interno dell'ascensore risulta dunque un sistema di riferimento inerziale S in cui valgono le leggi della relativitá ristretta. Secondo queste leggi, un raggio di luce emesso da una sorgente posta in una parete dell'ascensore ad un'altezza h dal pavimento, si propagherá in linea retta dal momento che per questo sistema di riferimento si ha $\mathbf{a} = 0$. Considerando peró un sistema di riferimento inerziale esterno S', questi misurerá l'accelerazione dell'ascensore: se la cabina é in caduta libera vicino alla superficie terrestre si avrá $\mathbf{a'} = -g\,\hat{\jmath}$ e la trasformazione non galileiana tra i sistemi di coordinate é la seguente (facendo in modo che all'istante $t = 0$ le origini dei due sistemi coincidano)

$$x' = x$$
$$y' = y - \frac{1}{2}gt^2$$

Ora, essendo $x = ct$ e $y = h$ in S, nel sistema di laboratorio S' avremo $x' = ct$ e $y' = h - 1/2gt^2$. Eliminando il tempo t otteniamo che la traiettoria della luce ha ora una forma parabolica data dall'equazione

$$y(x) = h - \frac{1}{2}\frac{g\,x^2}{c^2}$$

la situazione é illustrata in figura 1

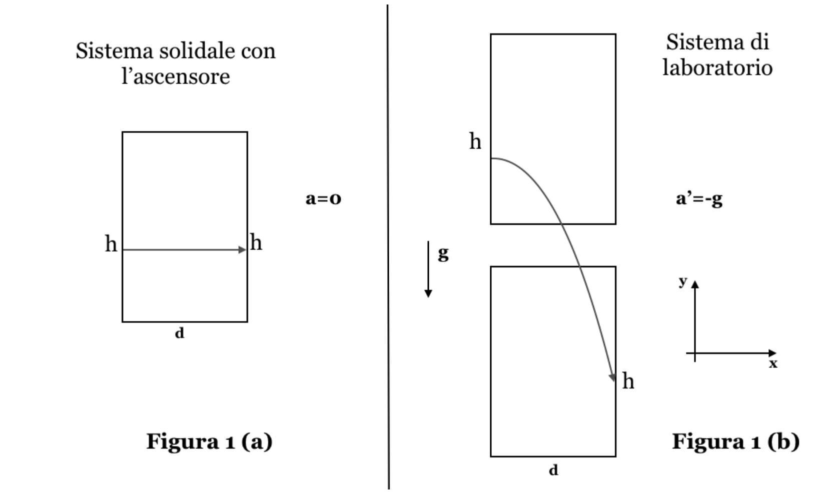

Figura 1 (a)

Figura 1 (b)

Per S' la luce ha subíto una deflessione di un angolo pari a circa

$$\alpha = \arctan \frac{gd}{c^2} = \arctan \frac{GMd}{R^2c^2}$$

se R é il raggio terrestre, M la massa della terra, G la costante di gravitazione universale, d la larghezza dell'ascensore. Partendo da questo esperimento concettuale Einstein arrivó a pensare che la luce possa essere deflessa anche da un campo gravitazionale.

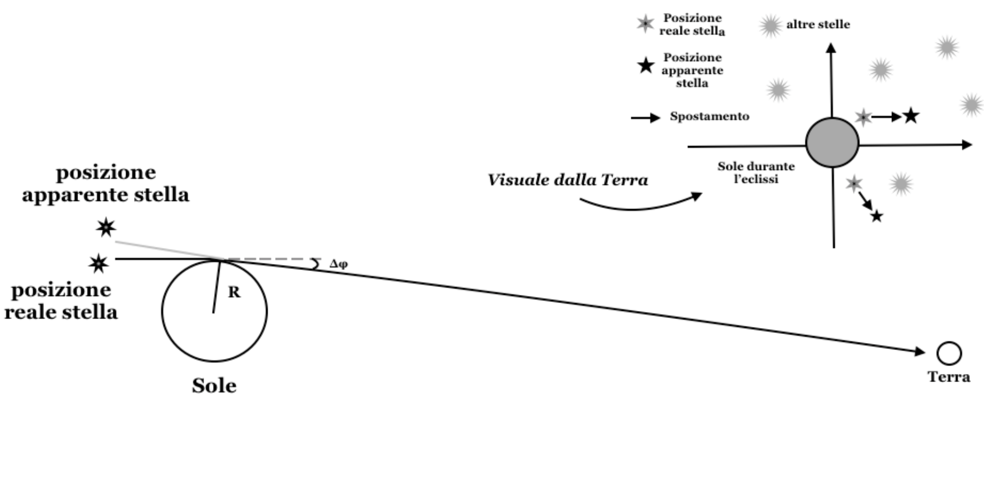

Figura 2

L'effetto poteva essere misurabile ed infatti nell'articolo del 1911 Einstein fece un appello agli astronomi per una verifica sperimentale. La deviazione della luce

di quelle stelle che rispetto alla visuale della Terra sono molto vicine al Sole si tradurrebbe in un dislocamento della loro posizione rispetto alle altre stelle piú lontane, e ció si potrebbe misurare confrontando due lastre fotografiche dello stesso gruppo di stelle in presenza o meno del Sole. In figura 2 questo fenomeno é osservato da due prospettive diverse.
Tuttavia l'elevata luminositá del Sole rendeva improponibile questa misurazione, fu per questo che giá Soldner poté concludere che l'effetto della deviazione potesse essere totalmente trascurabile ai fini delle osservazioni astronomiche. Einstein invece propose agli astronomi di osservare l'effetto durante un'eclissi solare, ma proprio mentre iniziavano a mobilitarsi gli osservatori astronomici, a causa dello scoppio della Grande Guerra nel 1914 l'esperimento fu messo da parte. Si noti che al momento della formulazione del principio di equivalenza per calcolare la deviazione della luce, Einstein non era ancora in possesso di una precisa teoria della gravitazione. Una tale teoria doveva tenersi in accordo con le predizioni della relativitá ristretta, da egli stesso formulata nel 1905. Ad esempio secondo la teoria newtoniana l'interazione gravitazionale tra due masse sarebbe dovuta essere istantanea, mentre la velocitá massima delle interazioni fisiche, secondo la relativitá ristretta, é quella della luce. Inoltre, vari tentativi da parte di alcuni fisici mostrarono che non era possibile costruire una teoria gravitazionale priva di falle concettuali se basata su di uno spazio piatto come quello della relativitá ristretta (lo spazio **M** di Minkowski). Restava inoltre irrisolta la questione dell'equivalenza tra massa gravitazionale e massa inerziale, ed il principio di equivalenza poteva essere applicato solo localmente, in quanto i campi gravitazionali variano con la distanza. Fu cosí che Einstein fu portato a introdurre nella relativitá generale il concetto di spazio curvo, al fine di ottenere una teoria soddisfacente per la gravitazione. Quando la relativitá generale fu completata nel 1916, Einstein ricalcoló la deviazione luminosa, ottenendo stavolta un risultato esattamente doppio rispetto a quello perseguito nel 1911. A differenza di quest'ultimo, che si basava esclusivamente sulla questione della curvatura temporale, nel 1916 egli aggiunse nei calcoli anche la curvatura dello spazio, ovvero la "metá mancante" del contributo, ottenendo $\Delta\varphi = 2 \times 0.875'' = 1.75''$.
Ci proponiamo di trattare il problema della deflessione introducendo i concetti basilari della relativitá generale, senza pretesa alcuna di rigorositá, ma solo per illustrarne i passaggi concettualmente importanti.
Consideriamo due punti infinitesimamente vicini A e B e congiungiamoli con un vettore

$$d\vec{x} = \vec{e}_1 dx^1 + \vec{e}_2 dx^2 + \vec{e}_3 dx^3 \equiv \vec{e}_i dx^i$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la convenzione di Einstein: due indici alti e bassi ripetuti si intendono sommati (in questo caso la somma va da $i = 1$ a $i = 3$ e i é detto "indice libero"). Il vettore é stato espresso utilizzando i vettori base $\vec{e}_i$ il che é una scelta ovviamente arbitraria. Lo stesso vettore puó essere espresso utilizzando per le sue componenti le basi j-esime $\vec{e}_j$ tale che $d\vec{x} = \vec{e}_j dx^j$. Sará quindi possibile determinare la distanza (o intervallo) tra i due punti A e B calcolando il prodotto scalare di $d\vec{x}$ con se stesso

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) dx^i dx^j \equiv n_{ij} dx^i dx^j \tag{1}$$

dove n_{ij} é uno scalare che rappresenta le componenti del tensore metrico $\vec{\vec{n}}$ il quale dipende dalle relazioni $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$ tra le basi vettoriali con cui tale spazio é stato espresso. Il tensore metrico in questo senso "aritmetizza" lo spazio. La (1) non é altro che una generalizzazione multidimensionale del concetto di distanza, e ds^2 preserva il proprio valore indipendentemente dalle coordinate scelte (in quanto scalare). Infatti per uno spazio euclideo e in presenza di componenti cartesiane ($x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$) espresse con i versori $\vec{e}_i = \vec{e}_j = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ é facile vedere che la (1) si riduce alla distanza euclidea

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Nello spazio **M**, che é lo spazio tetradimensionale della relativitá ristretta espresso con coordinate $x^u = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$ il tensore metrico ha componenti $n_{ij} = diag(+1, -1, -1, -1)$ e quindi **M** é pseudoeuclideo, ossia piatto. Lo spazio della relativitá generale, che indichiamo con **U**, é invece curvo. Qui la distanza sará data da

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j \tag{2}$$

Si noti che ora le componenti del tensore metrico dipendono dalla posizione x e dunque **U** non puó essere piatto. Fare delle operazioni su di uno spazio non-euclideo comporta la revisione del concetto stesso di operazione vettoriale. Se in coordinate cartesiane si vogliono sommare due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sará necessario traslare uno dei due vettori parallelamente alla propria direzione fino a far toccare la sua coda con la punta dell'altro vettore. In questo processo rimangono invariati modulo e direzione dei due vettori. Ció é dovuto al fatto che i vettori base di $\vec{A}$ e $\vec{B}$ (che sono in questo caso i versori cartesiani) rimangono invariati nel processo: hanno lo stesso valore in ogni luogo dello spazio. In uno spazio curvo le basi vettoriali sono invece funzione della localitá, dunque cambia anche la definizione di derivata di un vettore (poiché ora a variare non saranno piú solo le sue componenti, ma anche le basi vettoriali con cui sono espresse). In uno spazio curvo come in **U** i concetti di somma e derivata si uniscono, perché il trasporto parallelo di un vettore comporta una sua variazione rispetto alle coordinate. Si immaginino infatti la superficie di uno sferoide e una serie di piani tangenti in ogni punto della sua superficie. Si collochi un vettore su uno di questi piani facendo in modo che anche il vettore, in quel punto, sia tangente alla superficie. Si effettui ora un trasporto parallelo del vettore lungo la direzione, ad esempio, della sua punta, senza variarne il modulo: si noterá che questi non é piú tangente alla superficie dello sferoide. Un metodo per relazionare nuovamente il vettore traslato e i piani tangenti alla superficie é quello di calcolarne la proiezione sulla nuova n-esima porzione di piano tangente. Ci proponiamo di calcolare tale proiezione servendoci del calcolo differenziale assoluto. Consideriamo un vettore $\vec{A} = \vec{e}_1 A^1 + \vec{e}_2 A^2 + \vec{e}_3 A^3$ espresso con basi covarianti e componenti controvarianti (denotate le une con indici bassi, le altre con indici alti) e permettiamo a tali basi di variare anch'esse rispetto alle coordinate x^j esime. La derivata di $\vec{A}$ rispetto alla j-esima coordinata sará data dalla regola della derivata di un prodotto

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial(\vec{e}_1 A^1 + \vec{e}_2 A^2 + \vec{e}_3 A^3)}{\partial x^j} \equiv \frac{\partial(\vec{e}_i A^i)}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\vec{e}_i + A^i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} \tag{3}$$

Resta ora da definire l'ultimo termine dell'equazione. La derivata di una base vettoriale $\vec{e}_i$ rispetto ad una coordinata x^j é in generale un altro vettore definito da k componenti. Una notazione compatta che permette di riassumere queste componenti, specificando rispetto a quale coordinata sono state differenziate e in che direzione, fa uso dei *simboli di Christoffel*

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\vec{e}_k \tag{4}$$

Si noti che é stata utilizzata la convenzione di Einstein per l'indice libero k. Il simbolo Γ^k_{ij} si traduce come segue: una variazione del vettore $\vec{e}_i$ rispetto a una variazione della coordinata j-esima, ha una componente Γ^k_{ij} nella direzione $\vec{e}_k$. Ad esempio

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r}$$

indica che una variazione del vettore $\vec{e}_r$ rispetto a una variazione dell'angolo θ, ha una componente $1/r$ nella direzione di $\vec{e}_\theta$. A priori il calcolo di questi simboli non é scontato. Un buon metodo consiste nell'utilizzare le componenti del tensore metrico dello specifico sistema di coordinate che si sta utilizzando. É necessario dunque ricavare una relazione tra i simboli di Christoffel e il tensore metrico. Dimostreremo che ció é possibile attraverso un calcolo piuttosto euristico. Si consideri una particolare base vettoriale controvariante $\vec{e}^l$ tale che, per definizione

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}^l \equiv \delta^l_k = \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases}$$

Dove δ^l_k é la delta di Kronecker. Consideriamo l'equazione (4) e calcoliamo il prodotto scalare con $\vec{e}^l$

$$\Gamma^k_{ij}\vec{e}_k \cdot \vec{e}^l = \vec{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}$$

ossia

$$\Gamma^k_{ij}\delta^l_k = \vec{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}$$

La funzione delta, essendo data dal prodotto scalare di due basi vettoriali, si comporta come le componenti di un tensore metrico. Assumiamo di avere delle componenti A_i di un vettore, moltiplichiamole per il tensore metrico g^i_k e otteniamo

$$A_i g^i_k = A_k$$

la metrica agisce sugli indici ripetuti e li abbassa o li alza a seconda dei casi. Quindi se nel nostro calcolo abbiamo $\Gamma^k_{ij}\delta^l_k$ otteniamo

$$\Gamma^k_{ij}\delta^l_k = \Gamma^l_{ij}$$

dunque

$$\Gamma^l_{ij} = \vec{e}^l \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j}$$

Ora, a partire dalla definizione $d\vec{x} = \vec{e}_i dx^i = \vec{e}_j dx^j$ é possibile dire che

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i}$$

ed operare un artificio scrivendo

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i}$$

pertanto

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}\vec{e}^{\,l} \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \frac{1}{2}\vec{e}^{\,l} \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} \tag{5}$$

A questo punto prendiamo le componenti controvarianti del tensore metrico g^{kl} e la base vettoriale $\vec{e}_k$ costruendola in modo che $\vec{e}_j dx^j = \vec{e}_k dx^k$ e dunque

$$\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} = \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j}$$

formiamo il prodotto scalare con $\vec{e}_i$ e aggiungiamo e sottraiamo i termini

$$\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i$$

all'equazione (5) in modo da lasciarla inalterata (tale espressione dá infatti zero). Si faccia la stessa cosa tra $\vec{e}_k$ e $\vec{e}_i$, si formi il prodotto scalare con $\vec{e}_j$ e si aggiungano e sottraggano i termini

$$\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j$$

Ne risulterá

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}\vec{e}^{\,l} \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \left(\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i\right) + \frac{1}{2}\vec{e}^{\,l} \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} + \left(\frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j - \frac{1}{2}g^{kl}\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j\right)$$

Per convenienza, si noti che usando le componenti g^{kl} del tensore metrico, é possibile pensare $\vec{e}^{\,l}$ come $\vec{e}_k g^{kl}$ rendendo possibile il raccoglimento del termine $1/2g^{kl}$

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left[\vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i - \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i + \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j - \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j\right]$$

raccogliamo i segni in modo da ottenere 3 somme di due termini

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left[\left(\vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^j} \cdot \vec{e}_i\right) + \left(\vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^i} + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_j\right) - \left(\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} \cdot \vec{e}_j\right)\right]$$

Riconosciamo all'interno delle parentesi tonde le derivate dei prodotti $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k)\,, (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)\,, (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)$

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left[\frac{\partial(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k)}{\partial x^j} + \frac{\partial(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k)}{\partial x^i} - \frac{\partial(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)}{\partial x^k}\right]$$

Tali prodotti definiscono le varie componenti della metrica dello spazio **U**

$$\begin{gathered}\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = g_{ik} \\ \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = g_{jk} \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij}\end{gathered}$$

Siamo dunque giunti all'importante relazione tra i simboli di Christoffel e la metrica dello spazio

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right] \tag{6}$$

Ora che siamo legittimati all'uso di questi simboli (avendogli dato un significato geometrico con la metrica) possiamo completare la derivata del vettore nell'equazione (3)

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\vec{e}_i + A^i\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\vec{e}_i + A^i\Gamma^k_{ij}\vec{e}_k$$

Dal momento che i e k sono due indici liberi appartenenti allo stesso prodotto, essi hanno lo stesso significato indipendentemente da dove sono collocati e sono quindi interscambiabili

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\vec{e}_i + A^k\Gamma^i_{kj}\vec{e}_i$$

In questo caso ció é conveniente poiché ci permette di raccogliere il vettore $\vec{e}_i$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^k\Gamma^i_{kj}\right)\vec{e}_i$$

la quantitá tra parentesi é detta *derivata covariante* del vettore $\vec{A}$ rispetto alla x^j esima coordinata. La indicheremo con

$$D(A^i)_j = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^k\Gamma^i_{kj} \tag{7}$$

La derivata covariante ci permette di calcolare la proiezione del vettore sull'ennesima porzione di piano tangente ad una qualsiasi superficie curva descritta dalla metrica contenuta nei simboli di Christoffel. La (7) descrive la derivata covariante di un vettore espresso nelle sue componenti controvarianti. Se ci proponessimo di ottenere un'espressione valida anche per i covettori non potremmo seguire lo stesso procedimento. Possiamo peró partire dal seguente presupposto: considerato uno scalare ϕ la sua derivata covariante sará ovviamente identica alla sua derivata naturale rispetto ad una coordinata x^b

$$D(\phi)_b = \frac{\partial \phi}{\partial x^b} \equiv \partial_b\phi$$

dove per necessitá logistiche $\partial/\partial x^b \equiv \partial_b$. É possibile esprimere il generico vettore $d\vec{A}$ é nella sue versioni a componenti covarianti $\vec{A} = \vec{e}^k A_i$ o controvarianti $\vec{A} = \vec{e}_k A^i$ e formando il prodotto scalare con se stesso siamo sicuri che il prodotto A_iA^i é anch'esso uno scalare

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = (\vec{e}_k\cdot\vec{e}^k)A_iA^i = \delta^k_kA_iA^i = A_iA^i$$

Abbiamo assunto che per una quantitá scalare valga la seguente identitá

$$D(A_iA^i)_j = \partial_j(A_iA^i) \equiv A^i(\partial_jA_i) + A_i(\partial_jA^i) \tag{8}$$

dove abbiamo permesso a A_i e A_j di essere funzioni della coordinata x^j esima. In virtú di ció richiediamo che anche la derivata covariante obbedisca alla regola della derivata di un prodotto, ovvero che sia

$$D(A_iA^i)_j \equiv A^i[D(A_i)_j] + A_i[D(A^i)_j]$$

che sostituita nella (8) ci conduce alla seguente equazione

$$A^i[D(A_i)_j] + A_i[D(A^i)_j] = A^i(\partial_j A_i) + A_i(\partial_j A^i)$$

Sará quindi possibile calcolare la derivata covariante per le componenti covarianti del vettore $\vec{A}$ risolvendo questa equazione per il termine $D(A_i)_j$. D'altra parte il termine noto é $D(A^i)_j$ che é dato dalla (7) e che dunque sostituiamo

$$A^i[D(A_i)_j] + A_i(\partial_j A^i + A^k\Gamma^i_{kj}) = A^i(\partial_j A_i) + A_i(\partial_j A^i)$$

semplificando si giunge a

$$A^i[D(A_i)_j] + A_i A^k\Gamma^i_{kj} = A^i(\partial_j A_i)$$

Notiamo che i e k sono due indici liberi ripetuti nello stesso prodotto, dunque li scambiamo per convenienza e otteniamo

$$A^i[D(A_i)_j] + A_k A^i\Gamma^k_{ij} = A^i(\partial_j A_i)$$

quindi

$$A^i[D(A_i)_j] = A^i[(\partial_j A_i) - A_k\Gamma^k_{ij}]$$

che semplificando per A^i ci conduce alla derivata covariante per un covettore

$$D(A_i)_j = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - A_k\Gamma^k_{ij} \tag{9}$$

per la quale valgono le stesse considerazioni della (7) circa il suo utilizzo.
Le implicazioni geometriche dello spazio curvo in relativitá generale sono esemplificabili con un semplice esempio. Si consideri un vettore posto sulla tangente alla superficie terrestre in corrispondenza dell'equatore, con la punta rivolta verso nord. A partire da questa posizione effettueremo un trasporto parallelo del vettore in direzioni diverse, con punto di arrivo comune. In uno spazio piatto qualsiasi tipo di trasporto parallelo del vettore in un altra localitá fa sí che ivi il vettore conservi la stessa direzione e lo stesso modulo rispetto al punto di partenza, inoltre un tale percorso puó compiersi in infiniti modi purché non si alteri l'orientazione del vettore. Partendo dall'equatore, se effettuiamo un trasporto parallelo del vettore nella direzione nord (seguendo un meridiano) fino a un punto diametralmente opposto del globo, noteremo che ivi il vettore ha ora direzione verso sud. Effettuando invece il trasporto fino allo stesso punto, seguendo stavolta un parallelo, otteniamo che il vettore é ancora orientato verso nord. Ne concludiamo che in uno spazio curvo due tipi diversi di trasporto parallelo danno risultati diversi e che in alcuni casi questo trasporto altera la direzione stessa del vettore. Avendo introdotto un metodo per calcolare la proiezione del vettore sui piani tangenti alla superficie lungo il suo spostamento, ne conveniamo che se in uno spazio piatto l'ordine con cui si esegue la derivata covariante é irrilevante tale che eseguendo l'operazione in un verso e poi nel verso opposto il risultato é lo stesso e dunque la loro differenza é pari a zero, allora in uno spazio curvo qualsiasi risultato non nullo sarebbe invece imputabile alla curvatura stessa dello spazio.
A tale proposito eseguiremo la derivata covariante consecutivamente rispetto a due coordinate: x^β ed in seguito x^γ, per poi ripartire da capo e calcolarla iniziando stavolta con la coordinata x^γ per arrivare a x^β.

Prendiamo le componenti covarianti C_α di un vettore $\vec{C}$ e calcoliamone la derivata covariante rispetto ad una variazione della coordinata x^β

$$D(C_\alpha)_\beta = \frac{\partial C_\alpha}{\partial x^\beta} - C_\sigma \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$$

ora, questo risultato si comporta anch'esso come un tensore (in questo caso di rango 2) dunque é considerabile come un tensore a se stante: chiamiamolo $C_{\alpha\beta}$ e calcoliamone la derivata covariante per una variazione lungo la coordinata x^γ

$$D(C_{\alpha\beta})_\gamma = \frac{\partial C_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - C_{\tau\beta}\Gamma^\tau_{\alpha\gamma} - C_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\beta\gamma}$$

sostituendovi l'espressione per $C_{\alpha\beta} \equiv D(C_\alpha)_\beta$

$$D(C_{\alpha\beta})_\gamma = \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} C_\sigma - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial C_\sigma}{\partial x^\gamma}$$
$$-\Gamma^\tau_{\alpha\gamma}\left(\frac{\partial C_\tau}{\partial x^\beta} - \Gamma^\sigma_{\tau\beta}C_\sigma\right) - \Gamma^\eta_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial C_\alpha}{\partial x^\eta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\eta}C_\sigma\right)$$

In senso stretto abbiamo calcolato anzitutto la variazione nelle componenti C_α muovendoci lungo la x^β coordinata, che ci ha dato la quantitá tensoriale $C_{\alpha\beta}$, poi abbiamo calcolato la variazione di questa quantitá lungo la coordinata x^γ. Eseguiremo ora il percorso inverso, partendo sempre da C_α. La derivata covariante rispetto ad una variazione lungo la coordinata x^γ é

$$D(C_\alpha)_\gamma = \frac{\partial C_\alpha}{\partial x^\gamma} - C_\sigma \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}$$

chiamiamo questo risultato $C_{\alpha\gamma}$ e calcoliamone la derivata covariante, stavolta rispetto a x^β

$$D(C_{\alpha\gamma})_\beta = \frac{\partial C_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - C_{\tau\gamma}\Gamma^\tau_{\alpha\beta} - C_{\alpha\eta}\Gamma^\eta_{\gamma\beta}$$

ed inserendo il valore per $C_{\alpha\gamma} \equiv D(C_\alpha)_\gamma$

$$D(C_{\alpha\gamma})_\beta = \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} C_\sigma - \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\frac{\partial C_\sigma}{\partial x^\beta}$$
$$-\Gamma^\tau_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial C_\tau}{\partial x^\gamma} - \Gamma^\sigma_{\tau\gamma}C_\sigma\right) - \Gamma^\eta_{\gamma\beta}\left(\frac{\partial C_\alpha}{\partial x^\eta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\eta}C_\sigma\right)$$

Come abbiamo detto, in uno spazio piatto l'ordine di differenziazione covariante non dovrebbe fare alcuna differenza, per cui

$$D(C_{\alpha\beta})_\gamma - D(C_{\alpha\gamma})_\beta = 0$$

in caso contrario staremmo parlando di spazio curvo. Sostituendo le espressioni trovate

$$D(C_{\alpha\beta})_\gamma - D(C_{\alpha\gamma})_\beta = \frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} C_\sigma - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial C_\sigma}{\partial x^\gamma}$$
$$-\Gamma^\tau_{\alpha\gamma}\left(\frac{\partial C_\tau}{\partial x^\beta} - \Gamma^\sigma_{\tau\beta}C_\sigma\right) - \Gamma^\eta_{\beta\gamma}\left(\frac{\partial C_\alpha}{\partial x^\eta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\eta}C_\sigma\right)$$

$$-\frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} C_\sigma + \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} \frac{\partial C_\sigma}{\partial x^\beta}$$
$$+\Gamma^\tau_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial C_\tau}{\partial x^\gamma} - \Gamma^\sigma_{\tau\gamma} C_\sigma\right) + \Gamma^\eta_{\gamma\beta}\left(\frac{\partial C_\alpha}{\partial x^\eta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\eta} C_\sigma\right)$$

e ricordando che l'ordine di differenziazione per le derivate parziali non conta, che i simboli usati per gli indici liberi agli apici sono irrilevanti (ad esempio $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \Gamma^\tau_{\alpha\beta}$) e che i simboli di Christoffel sono simmetrici nei loro pedici (ad esempio $\Gamma^\eta_{\beta\gamma} = \Gamma^\eta_{\gamma\beta}$) giungiamo ai termini rimanenti

$$D(C_{\alpha\beta})_\gamma - D(C_{\alpha\gamma})_\beta = -\frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} C_\sigma + \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} C_\sigma + \Gamma^\tau_{\alpha\gamma}\Gamma^\sigma_{\tau\beta} C_\sigma - \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\Gamma^\sigma_{\tau\gamma} C_\sigma$$
$$= \left(\frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\tau_{\alpha\gamma}\Gamma^\sigma_{\tau\beta} - \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\Gamma^\sigma_{\tau\gamma}\right) C_\sigma$$

Ne conveniamo che i termini all'interno della parentesi determineranno la curvatura dello spazio: costoro costituiscono il tensore di curvatura di Riemann

$$R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\tau_{\alpha\gamma}\Gamma^\sigma_{\tau\beta} - \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\Gamma^\sigma_{\tau\gamma} \tag{10}$$

quindi la condizione necessaria e sufficiente per uno spazio piatto é

$$R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} = 0$$

Contraendo il tensore di Riemann ponendo ad esempio $\sigma = \beta$ si trova il tensore di Ricci $R_{\alpha\gamma}$

$$R_{\alpha\gamma} \equiv R^\sigma_{\alpha\sigma\gamma} = R^0_{\alpha 1\gamma} + R^1_{\alpha 1\gamma} + R^2_{\alpha 2\gamma} + R^3_{\alpha 3\gamma}$$

se invece contraiamo il tensore di Ricci utilizzando la metrica per alzare i due indici γ e α otteniamo lo scalare di Ricci

$$R \equiv g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\gamma} = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3$$

In uno spazio curvo, come in un qualsiasi altro spazio, i corpi seguono delle traiettorie naturali che si discostano di poco dalla traiettoria ideale (che in genere é quella estremale). Detta

$$S = \int_A^B ds$$

la congiungente tra due punti della traiettoria ideale, i corpi seguiranno una traiettoria S_k che si discosta cosí poco da quella ideale che $\delta S = S - S_k \approx 0$. Sappiamo che $ds = \sqrt{g_{uv} dx^u dx^v}$ dunque

$$\delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B \sqrt{g_{uv} dx^u dx^v} = 0$$

e agli estremi vale la condizione $\delta x_A = \delta x_B = 0$. Sviluppiamo il differenziale $\delta\sqrt{g_{uv} dx^u dx^v}$

$$= \int_A^B \frac{\delta(g_{uv} dx^u dx^v)}{2\,ds} = \int_A^B \frac{1}{2}\frac{1}{ds}(\delta g_{uv} dx^u dx^v + g_{uv} dx^v d\delta x^u + g_{uv} dx^u d\delta x^v)$$

e dal momento che $dx^v d\delta x^u = dx^u d\delta x^v$

$$= \int_A^B \frac{1}{2}\frac{1}{ds}(\delta g_{uv} dx^u dx^v + 2 g_{uv} dx^u d\delta x^v)$$

$$= \int_A^B \frac{1}{2}\delta g_{uv}\frac{dx^u}{ds} dx^v + g_{uv}\frac{dx^u}{ds} d\delta x^v$$

raccogliamo ds e poniamo che $\delta g_{uv} \equiv \dfrac{\partial g_{uv}}{\partial x^\sigma}\delta x^\sigma$

$$\int_A^B \left(\frac{1}{2}\delta g_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds} + g_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{d\delta x^v}{ds}\right) ds$$

$$= \int_A^B \left(\frac{1}{2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\frac{\partial g_{uv}}{\partial x^\sigma}\delta x^\sigma + g_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{d\delta x^v}{ds}\right) ds$$

Integriamo l'ultimo termine per parti

$$\int_A^B g_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{d\delta x^v}{ds} ds = g_{uv}\frac{dx^u}{ds}\int_A^B \frac{d\delta x^v}{ds} ds - \int_A^B \left[\frac{d}{ds}\left(g_{uv}\frac{dx^u}{ds}\right)\int \frac{d\delta x^v}{ds} ds\right] ds$$

$$= g_{u\sigma}\frac{dx^u}{ds}\left[\delta x^\sigma\right]_A^B - \int_A^B \frac{d}{ds}\left(g_{u\sigma}\frac{dx^u}{ds}\right)\delta x^\sigma ds$$

Ora, come abbiamo detto $\delta x^A = \delta x^B = 0$ dunque il primo termine si annulla e rimane

$$\int_A^B g_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{d\delta x^v}{ds} = -\int_A^B \frac{d}{ds}\left(g_{u\sigma}\frac{dx^u}{ds}\right)\delta x^\sigma ds$$

inserendo questo risultato nell'espressione giungiamo alla condizione

$$\int_A^B \left[\frac{1}{2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\frac{\partial g_{uv}}{\partial x^\sigma}\delta x^\sigma - \frac{d}{ds}\left(g_{u\sigma}\frac{dx^u}{ds}\right)\delta x^\sigma\right] ds = 0$$

la quale implica che l'integrando sia uguale a zero. Semplificando per δx^σ

$$\frac{1}{2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\frac{\partial g_{uv}}{\partial x^\sigma} - \frac{d}{ds}\left(g_{u\sigma}\frac{dx^u}{ds}\right) = 0$$

Sviluppiamo il differenziale

$$\frac{1}{2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\frac{\partial g_{uv}}{\partial x^\sigma} - g_{u\sigma}\frac{d^2x^u}{ds^2} - \frac{dx^u}{ds}\frac{dg_{u\sigma}}{ds} = 0$$

Notiamo che possiamo scrivere l'ultimo termine come segue

$$\frac{dx^u}{ds}\frac{dg_{u\sigma}}{ds} = \frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{dx^v}\frac{dg_{u\sigma}}{ds} = \frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\frac{\partial g_{u\sigma}}{\partial x^v}$$

Per la proprietá di abbassamento degli indici da parte della metrica vale la relazione $g_{u\sigma}dx^u = g_{v\sigma}dx^v$ per cui possiamo porre

$$\frac{\partial g_{u\sigma}}{\partial x^v} + \frac{\partial g_{v\sigma}}{\partial x^u} = 2\frac{\partial g_{u\sigma}}{\partial x^v}$$

e quindi

$$\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\frac{\partial g_{u\sigma}}{\partial x^v} = \frac{1}{2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}2\frac{\partial g_{u\sigma}}{\partial x^v} = \frac{1}{2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\left(\frac{\partial g_{u\sigma}}{\partial x^v} + \frac{\partial g_{v\sigma}}{\partial x^u}\right)$$

Sostituiamo quanto ottenuto nell'equazione principale

$$\frac{1}{2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\frac{\partial g_{uv}}{\partial x^\sigma} - g_{u\sigma}\frac{d^2x^u}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\left(\frac{\partial g_{u\sigma}}{\partial x^v} + \frac{\partial g_{v\sigma}}{\partial x^u}\right) = 0$$

riarrangiando i termini

$$g_{u\sigma}\frac{d^2x^u}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\left(\frac{\partial g_{u\sigma}}{\partial x^v} + \frac{\partial g_{v\sigma}}{\partial x^u} - \frac{\partial g_{uv}}{\partial x^\sigma}\right) = 0$$

Il secondo termine ricorda l'espressione per i simboli di Christoffel eccetto per un termine moltiplicativo $g^{p\sigma}$ che esplicita le componenti controvarianti della metrica, dunque moltiplichiamo tutto per esso (ottenendo $g^{p\sigma}g_{u\sigma} = g^p_u$ e dunque $g^p_u(x^u) = x^p$)

$$\frac{d^2x^p}{ds^2} + \frac{1}{2}g^{p\sigma}\left(\frac{\partial g_{u\sigma}}{\partial x^v} + \frac{\partial g_{v\sigma}}{\partial x^u} - \frac{\partial g_{uv}}{\partial x^\sigma}\right)\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds} = 0$$

a questo punto possiamo sostituirvi la (6) e otteniamo

$$\frac{d^2x^p}{ds^2} + \Gamma^p_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds} = 0 \tag{11}$$

che descrive le speciali traiettorie dei corpi nello spazio della relativitá generale: esse sono dette *geodetiche*, dunque la (11) é l'equazione delle geodetiche. Naturalmente anche un fascio di luce seguirá questo tipo di cammino. Il problema della deflessione della luce si risolve calcolando l'orbita di un fascio di fotoni di massa $m = 0$ che passa vicino alla superficie solare (con punto di massima vicinanza pari al raggio del Sole) risolvendo nella x^p coordinata l'equazione (11). L'unica cosa che resta da determinare sono le componenti metriche dello spazio, le quali dipendono dalle specifiche distribuzioni di energia che lo caratterizzano. Ció puó essere fatto risolvendo le equazioni di campo di Einstein

$$R_{uv} - \frac{1}{2}g_{uv}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{uv} \tag{12}$$

dove R_{uv} e R sono il tensore e lo scalare di Ricci, T_{uv} é il tensore momento-energia di Einstein. Come si usa dire comunemente circa il significato di questa equazione: la massa dice allo spazio come curvarsi, e lo spazio dice alla massa come muoversi. Ad ogni modo é piú corretto dire che qualsiasi distribuzione di energia contenuta nel tensore T_{uv} é in grado di curvare lo spazio, non solo la massa.

Per una distribuzione a simmetria sferica di energia generata da un campo gravitazionale (che rappresenta il caso dell'orbita intorno al Sole) é possibile risolvere esattamente le (12) per ottenere la soluzione di Schwarzschild, che utilizza le coordinate sferiche $x^u = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, r, \theta, \varphi)$ collocandone l'origine al centro del Sole e indicando con r la congiungente con il corpo orbitante.

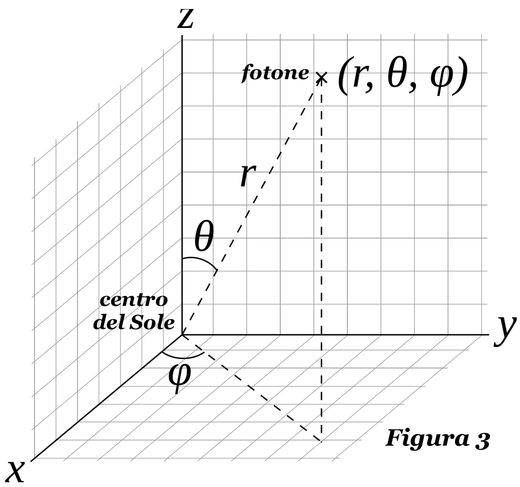

Figura 3

Secondo questa soluzione il tensore metrico ha espressione

$$\vec{\vec{g}}_{uv} = \begin{pmatrix} B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \tag{13}$$

con

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

$$A(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}$$

Dove M é nel nostro caso la massa del Sole.
La metrica é al solito data da

$$ds^2 = g_{uv} dx^u dx^v \equiv \sum_v \sum_u g_{uv} dx^u dx^v = \sum_{u=0}^{3} \left(\sum_{v=0}^{3} g_{uv} dx^u dx^v \right)$$

$$= \sum_{u=0}^{3} \left(g_{u0} dx^u dx^0 + g_{u1} dx^u dx^1 + g_{u2} dx^u dx^2 + g_{u3} dx^u dx^3 \right)$$

$$= \sum_{u=0}^{3} g_{u0} dx^u dx^0 + \sum_{u=0}^{3} g_{u1} dx^u dx^1 + \sum_{u=0}^{3} g_{u2} dx^u dx^2 + \sum_{u=0}^{3} g_{u3} dx^u dx^3$$

$$ds^2 = g_{00} dx^0 dx^0 + g_{10} dx^1 dx^0 + g_{20} dx^2 dx^0 + g_{30} dx^3 dx^0 + g_{01} dx^0 dx^1$$

$$+ g_{11} dx^1 dx^1 + g_{21} dx^2 dx^1 + g_{31} dx^3 dx^1 + g_{02} dx^0 dx^2 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} dx^2 dx^2$$

$$+ g_{32} dx^3 dx^2 + g_{03} dx^0 dx^3 + g_{13} dx^1 dx^3 + g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33} dx^3 dx^3$$

come si vede dalla (13) le uniche componenti non nulle sono $g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33}$ perció la metrica di Schwarzschild sará

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} (dx^1)^2 - r^2 (dx^2)^2 - r^2 \sin^2 \theta (dx^3)^2$$

$$= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

A questo punto é facile calcolare anche l'inversa della (13) che corrisponde alla versione controvariante $g^{\alpha\beta}$ del tensore metrico $g_{\alpha\beta}$

$$\vec{g}^{\,uv} = \begin{pmatrix} 1/B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2 cosec^2\theta \end{pmatrix} \tag{14}$$

Secondo la relativitá generale i fotoni non saranno attratti gravitazionalmente dalla massa solare nel senso classico del termine, bensí é la presenza della massa solare che curva lo spazio intorno alla stella a distorcere la traiettoria luminale facendole descrivere una geodetica curva. Il significato della gravitá risiede completamente nella deformazione geo-*metrica* dello spazio, ed é pertanto risolto nel tensore metrico (13). Disponendo di una metrica per lo spazio siamo in grado di calcolare i corrispondenti simboli di Christoffel e di conseguenza calcolare l'orbita dei fotoni utilizzando le (11). Calcolare tutti i simboli é un compito laborioso, che tuttavia puó essere semplificato notevolmente ricordando che questi sono simmetrici nei loro indici inferiori (quindi calcoleremo solamente $\Gamma^k_{\alpha\beta}$ al posto di calcolare anche $\Gamma^k_{\beta\alpha}$). Distinguiamo i simboli da determinare a paritá dei loro indici alti

$$Serie\ 0 : \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{11} + \Gamma^0_{22} + \Gamma^0_{33} + \Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{21} + \Gamma^0_{32} + \Gamma^0_{31}$$

$$Serie\ 1 : \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{33} + \Gamma^1_{10} + \Gamma^1_{21} + \Gamma^1_{32} + \Gamma^1_{31}$$

$$Serie\ 2 : \Gamma^2_{00} + \Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^2_{33} + \Gamma^2_{10} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{32} + \Gamma^2_{31}$$

$$Serie\ 3 : \Gamma^3_{00} + \Gamma^3_{11} + \Gamma^3_{22} + \Gamma^3_{33} + \Gamma^3_{10} + \Gamma^3_{21} + \Gamma^3_{32} + \Gamma^3_{31}$$

Inoltre dalla (14) notiamo che sono non nulle solo le componenti $g^{00}, g^{11}, g^{22}, g^{33}$ dunque

$$\Gamma^\tau_{v\sigma} = \frac{1}{2} g^{u\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau v}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^v} - \frac{\partial g_{v\sigma}}{\partial x^u} \right)$$

si esemplifica come

$$\Gamma^\tau_{v\sigma} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} g^{\tau\tau} \left(\dfrac{\partial g_{\tau v}}{\partial x^\sigma} + \dfrac{\partial g_{\tau\sigma}}{\partial x^v} - \dfrac{\partial g_{v\sigma}}{\partial x^\tau} \right) & u = \tau \\ \\ 0 & u \neq \tau \end{cases}$$

facendo diversamente avremmo dovuto calcolare ogni membro della somma sull'indice libero u, allungando i calcoli.
Iniziamo con il calcolo della serie 0.

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2B} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial B(r)}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial B(r)}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial B(r)}{\partial t} \right) = \frac{1}{2B}(0) = 0$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2B} \left(\frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial(-A(r))}{\partial t} \right) = \frac{1}{2B}(0) = 0$$

$$\Gamma^0_{22} = \frac{1}{2}g^{00}\left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2B}\left(\frac{\partial 0}{\partial \theta} + \frac{\partial 0}{\partial \theta} - \frac{1}{c}\frac{\partial(-r^2)}{\partial t}\right) = \frac{1}{2B}(0) = 0$$

$$\Gamma^0_{33} = \frac{1}{2}g^{00}\left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2B}\left(\frac{\partial 0}{\partial \varphi} + \frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{1}{c}\frac{\partial(-r^2\sin^2\theta)}{\partial t}\right) = \frac{1}{2B}(0) = 0$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}g^{00}\left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2B}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial 0}{\partial t} + \frac{\partial B(r)}{\partial r} - \frac{1}{c}\frac{\partial 0}{\partial t}\right) = \frac{B'}{2B}$$

$$\Gamma^0_{21} = \frac{1}{2}g^{00}\left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2B}\left(\frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{\partial 0}{\partial \theta} - \frac{1}{c}\frac{\partial 0}{\partial t}\right) = \frac{1}{2B}(0) = 0$$

$$\Gamma^0_{32} = \frac{1}{2}g^{00}\left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^0}\right) = \left(\frac{\partial 0}{\partial \theta} + \frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{1}{c}\frac{\partial 0}{\partial t}\right) = \frac{1}{2B}(0) = 0$$

$$\Gamma^0_{31} = \frac{1}{2}g^{00}\left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^0}\right) = \frac{1}{2B}\left(\frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{1}{c}\frac{\partial 0}{\partial t}\right) = \frac{1}{2B}(0) = 0$$

Calcoliamo ora la serie 1

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial 0}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial 0}{\partial t} - \frac{\partial B(r)}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2A}(-B') = \frac{B'}{2A}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial(-A(r))}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2A}(-A') = \frac{A'}{2A}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial 0}{\partial \theta} + \frac{\partial 0}{\partial \theta} - \frac{\partial(-r^2)}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2A}(2r) = -\frac{r}{A}$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial 0}{\partial \varphi} + \frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{\partial(-r^2\sin^2\theta)}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2A}(2r\sin^2\theta) = -\frac{r\sin^2\theta}{A}$$

$$\Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial(-A(r))}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2A}(0) = 0$$

$$\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{\partial(-A(r))}{\partial \theta} - \frac{\partial 0}{\partial r}\right) = \frac{1}{2A}(0) = 0$$

$$\Gamma^1_{32} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial 0}{\partial \theta} + \frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{\partial 0}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2A}(0) = 0$$

$$\Gamma^1_{31} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1}\right) = -\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{\partial(-A(r))}{\partial \varphi} - \frac{\partial 0}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2A}(0) = 0$$

Ora la serie 2

$$\Gamma^2_{00} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2r^2}\left(\frac{2}{c}\frac{\partial 0}{\partial t} - \frac{\partial B(r)}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{2r^2}(0) = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial(-A(r))}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{2r^2}(0) = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial(-r^2)}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{2r^2}(0) = 0$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial 0}{\partial \varphi} + \frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{\partial(-r^2\sin^2\theta)}{\partial \theta}\right)$$
$$= -\frac{1}{2r^2}(2r^2\sin\theta\cos\theta) = -\sin\theta\cos\theta$$
$$\Gamma^2_{10} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2r^2}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial 0}{\partial t} + \frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial 0}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{2r^2}(0) = 0$$
$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial(-r^2)}{\partial r} + \frac{\partial 0}{\partial \theta} - \frac{\partial 0}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{2r^2}(-2r) = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^2_{32} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial(-r^2)}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{2r^2}(0) = 0$$
$$\Gamma^2_{31} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{\partial 0}{\partial \theta}\right) = -\frac{1}{2r^2}(0) = 0$$

Terminiamo con la serie 3

$$\Gamma^3_{00} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3}\right) = -\frac{1}{2r^2}cosec^2\theta\left(\frac{2}{c}\frac{\partial 0}{\partial t} - \frac{\partial B(r)}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{r^2}cosec^2\theta(0) = 0$$
$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\right) = -\frac{1}{2r^2}cosec^2\theta\left(2\frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial(-A(r))}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{r^2}cosec^2\theta(0) = 0$$
$$\Gamma^3_{22} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3}\right) = -\frac{1}{2r^2}cosec^2\theta\left(2\frac{\partial 0}{\partial \theta} - \frac{\partial(-r^2)}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{r^2}cosec^2\theta(0) = 0$$
$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3}\right) = -\frac{1}{2r^2}cosec^2\theta\left(\frac{\partial(-r^2\sin^2\theta)}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{r^2}cosec^2\theta(0) = 0$$
$$\Gamma^3_{10} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^3}\right) = -\frac{1}{2r^2}cosec^2\theta\left(\frac{1}{c}\frac{\partial 0}{\partial t} + \frac{\partial 0}{\partial r} - \frac{\partial 0}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{r^2}cosec^2\theta(0) = 0$$
$$\Gamma^3_{21} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^3}\right) = -\frac{1}{2r^2}cosec^2\theta\left(\frac{\partial 0}{\partial r} + \frac{\partial 0}{\partial \theta} - \frac{\partial 0}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{r^2}cosec^2\theta(0) = 0$$
$$\Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3}\right) = -\frac{1}{2r^2}cosec^2\theta\left(\frac{\partial(-r^2\sin^2\theta)}{\partial \theta}\right) = -\frac{(-2r^2\sin\theta\cos\theta)}{2r^2\sin^2\theta} = cotg\theta$$
$$\Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3}\right) = -\frac{1}{2r^2}cosec^2\theta\left(\frac{\partial(-r^2\sin^2\theta)}{\partial r}\right) = -\frac{(-2r\sin^2\theta)}{2r^2\sin^2\theta} = \frac{1}{r}$$

Riassumendo, abbiamo trovato i seguenti simboli

$$\Gamma^0_{10} = \frac{B'}{2B} \qquad \Gamma^1_{00} = \frac{B'}{2A} \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{A'}{2A} \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{A}$$
$$\Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{A} \qquad \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^3_{32} = cotg\theta \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$
$$\Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$

Non resta che inserire questi valori all'interno delle p-esime equazioni geodetiche (11). Anche quí ci troviamo in presenza di un indice libero p e degli indici ripetuti u e v sui quali va calcolata la doppia somma secondo la convenzione di Einstein. Quindi classifichiamo nuovamente le equazioni a paritá di indice p distinguendo in

$$Serie\ 0: \frac{d^2x^0}{ds^2} + \Gamma^0_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds} = 0$$

$$Serie\ 1: \frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds} = 0$$

$$Serie\ 2: \frac{d^2x^2}{ds^2} + \Gamma^2_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds} = 0$$

$$Serie\ 3: \frac{d^2x^3}{ds^2} + \Gamma^3_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds} = 0$$

Per la serie 0

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + \Gamma^0_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds} = \frac{d^2x^0}{ds^2} + \sum_{u=0}^{3}\left(\sum_{v=0}^{3}\Gamma^0_{uv}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^v}{ds}\right)$$

$$= \frac{d^2x^0}{ds^2} + \sum_{u=0}^{3}\left(\Gamma^0_{u0}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^0}{ds} + \Gamma^0_{u1}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^0_{u2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^0_{u3}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^3}{ds}\right)$$

per evitare calcoli inutilmente laboriosi, notiamo che é non nullo solo il simbolo $\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01}$ pertanto la doppia somma si riduce a

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + \Gamma^0_{10}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^0}{ds} + \Gamma^0_{01}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^1}{ds} = \frac{d^2x^0}{ds^2} + 2\Gamma^0_{10}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^0}{ds} = 0$$

Del pari per la serie 1

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \sum_{u=0}^{3}\left(\Gamma^1_{u0}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^0}{ds} + \Gamma^1_{u1}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^1_{u2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^1_{u3}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^3}{ds}\right)$$

Anche qui sono non nulli solo Γ^1_{00},Γ^1_{11},Γ^1_{22},Γ^1_{33} quindi

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{00}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds} + \Gamma^1_{11}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^1_{22}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^1_{33}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^3}{ds}$$

$$= \frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 + \Gamma^1_{11}\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + \Gamma^1_{22}\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 + \Gamma^1_{33}\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2 = 0$$

E quindi la serie 2

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \sum_{u=0}^{3}\left(\Gamma^2_{u0}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^0}{ds} + \Gamma^2_{u1}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^2_{u2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^2_{u3}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^3}{ds}\right)$$

per la quale abbiamo i due simboli $\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12}$ e Γ^2_{33} dunque

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \Gamma^2_{21}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^2_{12}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^2_{33}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^3}{ds} = \frac{d^2x^2}{ds^2} + 2\Gamma^2_{21}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^2_{33}\left(\frac{dx^3}{ds}\right)^2 = 0$$

Ed infine la serie 3

$$\frac{d^2x^3}{ds^2} + \sum_{u=0}^{3}\left(\Gamma^3_{u0}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^0}{ds} + \Gamma^3_{u1}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^3_{u2}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^3_{u3}\frac{dx^u}{ds}\frac{dx^3}{ds}\right)$$

per la quale abbiamo trovato $\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23}$ e $\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13}$

$$\frac{d^2x^3}{ds^2} + \Gamma^3_{32}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^3_{23}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^3}{ds} + \Gamma^3_{31}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^3_{13}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^3}{ds}$$

$$= \frac{d^2x^3}{ds^2} + 2\Gamma^3_{32}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^2}{ds} + 2\Gamma^3_{31}\frac{dx^3}{ds}\frac{dx^1}{ds} = 0$$

Sostituendo in queste espressioni le coordinate $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, r, \theta, \varphi)$ e i valori dei simboli di Christoffel giungiamo alla famiglia di equazioni

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{B'}{B}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{c^2B'}{2A}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{A'}{2A}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{r}{A}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - \frac{r\sin^2\theta}{A}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \tag{16}$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{ds}\frac{dr}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \tag{17}$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2cotg\theta\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 \tag{18}$$

Se ora facciamo in modo che il moto si compia esclusivamente sul piano *x,y* della figura 3 dovremo porre $\theta = \pi/2$ e dunque tutte le derivate di θ si annullano. Il fine é quello di seguire l'orbita del fotone di luce attraverso il raggio vettore r per calcolarne la deflessione in funzione dell'angolo φ secondo la figura 4

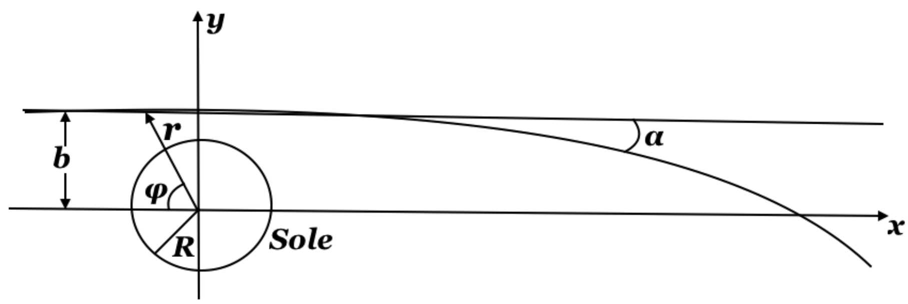

Figura 4

Sotto questa condizione la (18) diviene

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{ds}\frac{dr}{ds} = 0$$

e moltiplicandola per r^2 notiamo che é riscrivibile come

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}r^2 + \frac{d\varphi}{ds}2r\frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds}r^2\right) = 0$$

Allo stesso modo moltiplicando la (15) per B

$$\frac{d^2t}{ds^2}B + \frac{dt}{ds}B'\frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}B\right) = 0$$

dal momento che

$$\frac{dB}{ds} = \frac{dB}{dr}\frac{dr}{ds} = B'\frac{dr}{ds}$$

Le ultime due equazioni implicano dunque che

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = costante = C \tag{19}$$

$$B\frac{dt}{ds} = costante = W \tag{20}$$

La (19) ricorda la classica legge di conservazione del momento angolare L nei campi di forza centrali, dunque dobbiamo imporre che nel limite non relativistico (vale a dire $ds \approx cdt$) si abbia

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} \approx \frac{L}{m}$$

e dunque troviamo il valore per C

$$\frac{1}{c}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mc} = C$$

tale che

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = \frac{L}{mc}$$

Se ora identifichiamo la (20) con la legge di conservazione dell'energia dobbiamo imporre che per $ds \approx cdt$ e $B(r) \approx 1$ (limite non relativistico e campo gravitazionale debole) si riconduca all'energia a riposo del corpo orbitante $E = mc^2$ ossia

$$B\frac{dt}{ds} \approx \frac{1}{c}\frac{dt}{dt} = \frac{1}{c} = W$$

e dunque

$$E = ZW = Z\frac{1}{c} \approx mc^2$$

ottenendo per la costante Z

$$Z = mc^3$$

pertanto

$$B\frac{dt}{ds} = W = \frac{E}{Z} = \frac{E}{mc^3}$$

Consideriamo ora la (16) nel piano x,y

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{c^2B'}{2A}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{A'}{2A}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \frac{r}{A}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0$$

Il suo integrale é dato dalla metrica di Schwarzschild (con $\theta = \pi/2$)

$$ds^2 = Bc^2dt^2 - Adr^2 - r^2d\varphi^2$$

divisa per ds^2

$$1 = Bc^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - A\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$$

In questa equazione inseriamo i valori per $\frac{d\varphi}{ds}$ e $\frac{dt}{ds}$ ottenendo

$$A\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2c^2} - \frac{1}{B}\frac{E^2}{m^2c^4} + 1 = 0$$

Ora sostituiamo le espressioni per $A(r)$ e $B(r)$

$$\frac{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}{1 - \frac{2GM}{c^2r}} + \frac{L^2}{m^2r^2c^2} - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2r}}\frac{E^2}{m^2c^4} + 1 = 0$$

pertanto

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2c^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) - \frac{E^2}{m^2c^4} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) = 0$$

Facciamo in modo di eliminare il parametro ds tale da ottenere una traiettoria che sia funzione esclusivamente delle coordinate (r, φ). A tal fine ricordiamo che essendo $r^2d\varphi/ds = L/mc$ avremo

$$ds = \frac{r^2mc\,d\varphi}{L}$$

e pertanto l'equazione diventa

$$\left(\frac{L}{mcr^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2c^2}\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) - \frac{E^2}{m^2c^4} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) = 0$$

Effettuando le dovute semplificazioni giungiamo a

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) - \frac{r^4}{c^2}\frac{E^2}{L^2} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)\frac{m^2c^2r^4}{L^2} = 0$$

che é l'equazione dell'orbita di un grave in relativitá generale. Per un fotone di massa $m = 0$ questa si riduce a

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) - \frac{r^4}{c^2}\frac{E^2}{L^2} = 0$$

Ora, facendo riferimento alla figura 4, notiamo che all'inizio dell'interazione Sole-fotone, quest'ultimo ha un momento angolare

$$L = p\,b$$

dove b é la distanza verticale tra il fotone e il centro del Sole (detto parametro di impatto) mentre p é la sua quantitá di moto. D'altra parte l'energia di un fotone é nota essere

$$E = pc$$

A questo punto é facile vedere che

$$\frac{E}{L} = \frac{c}{b}$$

e sostituendolo nell'equazione

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{r^4}{b^2} = 0$$

Effettuiamo ora un'importante sostituzione: ponendo $r = 1/u$ i differenziali si scrivono come $dr = -\frac{1}{u^2}du$ e pertanto

$$\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{u^2}\left(1 - \frac{2GM\,u}{c^2}\right) - \frac{1}{u^4 b^2} = 0$$

moltiplicando per u^4

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\left(1 - \frac{2GM\,u}{c^2}\right) - \frac{1}{b^2} = 0$$

Deriviamo ora questa espressione rispetto alla coordinata φ

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{d}{d\varphi}u^2 - \frac{d}{d\varphi}\frac{2GM\,u^3}{c^2} - \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{b^2} = 0$$

Il parametro di impatto é una costante, dunque rimane solo

$$2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)\frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u\frac{du}{d\varphi} - 6\frac{GM}{c^2}\frac{du}{d\varphi}u^2 = 0$$

semplificando il termine $2\frac{du}{d\varphi}$ giungiamo all'equazione differenziale da cui ricaveremo l'angolo di deflessione

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2 \tag{21}$$

L'equazione omogenea associata é

$$\frac{d^2u_o}{d\varphi^2} + u_o = 0$$

che ponendo come ipotetica soluzione $u_o = e^{p\varphi}$ e semplificando per $e^{p\varphi} \neq 0$ una volta sostituita, ci conduce a

$$p^2 + 1 = 0$$

permettendoci di ottenere due soluzioni che sovrapponiamo $u_o = c_1 e^{i\varphi} + c_2 e^{-i\varphi}$. Con la notazione di Eulero abbiamo

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

assorbiamo allora le costanti in $A = c_1 + c_2$ e $B = i(c_1 - c_2)$ per ottenere

$$u_o = A\cos\varphi + B\sin\varphi$$

Osservando la figura 4, possiamo dedurre alcune condizioni: la prima é che per $\varphi = 0$ il raggio vettore tende ad infinito e quindi il suo inverso tende a zero; la seconda é che per $\varphi = \pi/2$ il raggio corrisponda al parametro di impatto b. Ponendo queste condizioni troviamo $A = 0$ e $B = 1/b$ dunque otteniamo come soluzione dell'equazione omogenea

$$u_o = \frac{1}{b}\sin\varphi$$

Possiamo ora porre (data la piccolezza di u^2) come prima approssimazione $u \approx u_o$ e sostituirlo al secondo membro della (21)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3GM}{c^2b^2}\sin^2\varphi = a\sin^2\varphi \tag{22}$$

dove abbiamo posto

$$a \equiv \frac{3GM}{c^2b^2}$$

Una soluzione della (22) sará data dalla sovrapposizione della soluzione omogenea u_h (che abbiamo giá calcolato) con una soluzione particolare u_p

$$u(\varphi) = u_h + u_p = A\cos\varphi + B\sin\varphi + u_p$$

Notiamo che utilizzando le formule trigonometriche

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$$

é possibile trasformare la (21)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos 2\varphi$$

Come di consueto, una soluzione é da cercarsi nella forma

$$u_p = Z\cos 2\varphi + N\sin 2\varphi + S$$

che sostituita nella (21) porta a

$$-4Z\cos 2\varphi - 4N\sin 2\varphi + Z\cos 2\varphi + N\sin 2\varphi + S = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos 2\varphi$$

$$-3Z\cos 2\varphi - 3N\sin 2\varphi + S = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos 2\varphi$$

e dunque comparando i termini deduciamo che devono essere

$$Z = \frac{a}{6}$$
$$N = 0$$
$$S = \frac{a}{2}$$

Pertanto

$$u_p = \frac{a}{6}\cos 2\varphi + \frac{a}{2}$$

e la soluzione completa é data da

$$u(\varphi) = \frac{a}{6}\cos 2\varphi + \frac{a}{2} + A\cos\varphi + B\sin\varphi$$

Risolviamo nuovamente il problema di Cauchy ponendo le condizioni

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varphi\to 0} u(\varphi) = 0 \\ \\ u(\pi/2) = \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

trovando

$$A = -\left(\frac{a}{6} + \frac{a}{2}\right) = -\frac{2}{3}a$$
$$B = \frac{a}{6} - \frac{a}{2} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{3}a$$

In definitiva la funzione che descrive la traiettoria del fascio di luce intorno al sole é data da

$$u(\varphi) = \frac{a}{6}\cos 2\varphi + \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{b} - \frac{a}{3}\right)\sin\varphi - \frac{2}{3}a\cos\varphi \tag{23}$$

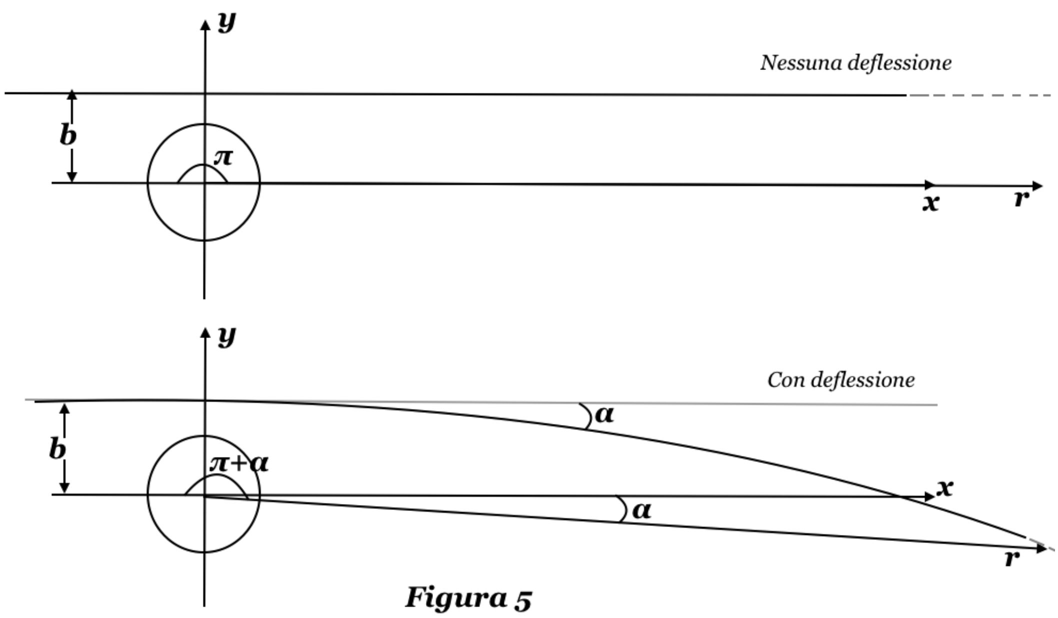

Figura 5

Se non vi fosse deflessione, il fascio di luce proseguirebbe indisturbato allontanandosi infinitamente dal Sole, facendo descrivere al raggio vettore un angolo pari a

$$\varphi = \pi$$

prima di lasciare l'orbita solare. Matematicamente avremmo dovuto avere $\lim_{\varphi \to \pi} u(\varphi) = 0$ mentre é chiaro dalla (23) che $u(\pi) = \frac{4}{3}a$. Dunque, prima di allontanarsi del tutto (e quindi prima che $u(\varphi)$ tenda a zero) dobbiamo supporre che l'orbita luminale descriverá con il raggio vettore un ulteriore angolo α. Poniamo dunque la seguente condizione

$$\lim_{\varphi \to (\pi+\alpha)} u(\varphi) = 0$$

che inserita nella (23) ci porta all'utilizzo delle somme di archi

$$u(\pi + \alpha) = \frac{a}{6}\cos(2\pi + 2\alpha) + \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{b} - \frac{a}{3}\right)\sin(\pi + \alpha) - \frac{2a}{3}\cos(\pi + \alpha) = 0$$

eseguendo i calcoli giungiamo a

$$\frac{a}{6}\cos 2\alpha + \frac{a}{2} - \frac{1}{b}\sin\alpha + \frac{a}{3}\sin\alpha + \frac{2a}{3}\cos\alpha = 0$$

Supponiamo ragionevolmente che α sia molto piccolo, pertanto arrestiamo al prim'ordine lo sviluppo dei termini goniometrici ottenendo

$$\cos 2\alpha \approx 1$$

$$\sin\alpha \approx \alpha$$

$$\cos\alpha \approx 1$$

L'equazione si riduce a

$$\frac{a}{6} + \frac{a}{2} - \frac{1}{b}\alpha + \frac{a}{3}\alpha + \frac{2a}{3} = 0$$

Moltiplichiamo tutto per b ed introduciamo la costante

$$K = a\,b = \frac{3GM}{c^2b^2}b = \frac{3GM}{c^2b}$$

$$\frac{K}{6} + \frac{K}{2} - \alpha + \frac{K}{3}\alpha + \frac{2}{3}K = 0$$

Non ci resta che risolvere l'equazione rispetto a α per ottenere

$$\alpha = \frac{\frac{4}{3}K}{1 - \frac{K}{3}}$$

Dal momento che K é molto piccolo, é possibile sviluppare il denominatore utilizzando l'approssimazione $(1-x)^n \approx 1 - nx$ e pertanto

$$\left(1 - \frac{K}{3}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{K}{3}$$

ottenendo

$$\alpha = \frac{4}{3}K\left(1+\frac{K}{3}\right) = \frac{4}{3}K + \frac{4}{9}K^2$$

trascurando K^2 che é piccolissimo, giungiamo finalmente a

$$\alpha = \frac{4}{3}K = \frac{4}{3}\frac{3GM}{c^2 b} = \frac{4GM}{c^2 b}$$

L'effetto della deflessione é piuttosto esile, tale che risulta totalmente trascurabile per la luce stellare che passa anche relativamente vicina alla superficie solare. In altri contesti la deflessione é invece cosí evidente da fornire agli astronomi spettacolari "lenti" gravitazionali: il campo gravitazionale di un vasto agglomerato di masse focalizza i raggi luminosi dei corpi che rispetto alla Terra stanno dietro al gruppo massivo e che senza questo effetto non sarebbero altrimenti visibili. Nel caso del Sole, é ragionevole ritenere che la deflessione sia apprezzabile solo per quei raggi che ne sfiorano la superficie: porremo dunque $b = R$ come parametro di impatto, dove $R = 6.95508 \cdot 10^8 m$ é il raggio del Sole. La massa del Sole é $M = 1.989 \cdot 10^{30} kg$ dunque

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 R} = 8.492 \cdot 10^{-6} rad$$

Convertiamo il risultato in gradi moltiplicando per $180/\pi$ e moltiplichiamo per 3600 al fine di ottenere l'espressione in secondi d'arco. Otteniamo

$$\alpha = 1.7516''$$

Come predetto, questo risultato é esattamente il doppio di quello ottenuto utilizzando l'approccio newtoniano di Soldner o il principio di equivalenza del 1911. Una verifica sperimentale arrivó con la spedizione di Arthur Eddington nel 1919 in occasione di un'eclissi di Sole. La sua equipe misuró, entro l'errore sperimentale, una deflessione di $1.98 \pm 0.18''$ non senza polemiche: Eddington ebbe cura di scartare le misure effettuate con le lenti astrografiche, le quali attestavano una deviazione pari a $0.93''$ assai vicina a quella newtoniana. Una verifica piú precisa arrivó nel 1973 da parte dell'universitá del Texas con il valore di $1.66 \pm 0.18''$ confermando ulteriormente la teoria della relativitá generale.

Matteo Parriciatu