

# La misurazione in meccanica quantistica

MATTEO PARRICIATU

Università di Pisa

28 dicembre 2019

## Sommario

*Questa nota è da intendersi come una riflessione a livello molto elementare sul concetto di misura dal punto di vista della meccanica quantistica. La struttura logica e matematica della meccanica quantistica è nata per interpretare e predire i risultati degli esperimenti a livello atomico-molecolare. Il mondo microscopico è così energeticamente distante dal nostro che numerosi concetti classici hanno perso efficacia nella descrizione dei fenomeni: alcuni sono stati abbandonati, altri sono stati ridefiniti. Uno di questi è il concetto di misura. Per effettuare una misura su un sistema fisico servono due cose: una quantità da misurare, e un apparato per misurarla. Il punto di partenza per comprendere la teoria della misura è quindi quello di indagare cosa succeda tra apparato e sistema durante l'atto della misura stessa. A tal fine verranno discussi l'approccio di Von Neumann e una sua possibile giustificazione: la decoerenza quantistica.*

## 1. IL PROBLEMA

Sperimentalmente si è osservato che le misure dei sistemi quantistici non seguono le regole dettate dalla logica comune. Per fare delle previsioni teoriche sul risultato degli esperimenti è stato quindi necessario costruire un'importante impalcatura matematica, che è la meccanica quantistica. Una descrizione di un esperimento ultra-semplificato è la seguente:

Supponiamo di voler misurare lo spin di una particella tramite un apparato. Lo spin è una quantità sensibile all'orientazione spaziale, e in una specifica direzione la sua misura può produrre solo due risultati:  $+1$  o  $-1$ . Tali risultati vengono segnalati dall'apparato di misura, che possiamo orientare a piacere nello spazio. Di principio non possiamo sapere che orientazione ha lo spin della particella prima di misurarla (o non ci saremmo posti il problema), dunque facciamo un tentativo a caso e per fissare le idee orientiamo l'apparato verso l'asse  $z$ . Supponiamo di ottenere il valore  $+1$ . Ne deduciamo che lo spin si trova nello stato  $up$  sull'asse  $z$ , lo indichiamo con  $|u\rangle$ . A questo punto, per essere

sicuri, ripetiamo immediatamente la misura, mantenendo l'apparato sull'asse  $z$ : il risultato è ancora  $+1$ . Si osserva che, mantenendo tutto invariato, se dopo la prima misura ne effettuiamo altre  $N$ , otteniamo  $N$  volte lo stesso risultato. Fin qui nulla di anomalo, il concetto di "misura" in senso quantistico è ragionevole. Ora, se lo spin si trova nello stato  $|u\rangle$  lungo l'asse  $z$ , potremmo supporre che sicuramente non si troverà lungo l'asse  $x$ , per cui ruotando l'apparato lungo  $x$  la misura dovrebbe restituire il valore "zero". Si scopre che non è così.

Se proviamo a misurare lungo  $x$  otteniamo, ad esempio, ancora il valore  $+1$ . Per essere sicuri manteniamo l'apparato su  $x$ , e rimisuriamo  $N$  volte: otteniamo  $N$  volte il valore  $+1$ , per cui dobbiamo dedurre che lo spin si trovi ora nello stato  $right$ , indicato con  $|r\rangle$ . Uno potrebbe pensare di aver commesso qualche errore, e preferirebbe ricondurre l'esperimento da capo. Per semplicità supponiamo di rimisurare lungo l'asse  $z$  il valore  $+1$ , per sicurezza ripetiamo  $N$  volte ed otteniamo  $N$  volte  $+1$ , dunque lo stato è  $|u\rangle$ . Ora orientiamo nuovamente l'apparato lungo  $x$ , stavolta la misura fornisce  $-1$ ,

cioè lo stato *left*,  $|l\rangle$ . Destati dal dubbio decidiamo di ripetere questa procedura (asse  $z \rightarrow$  asse  $x$ )  $N$  volte, partendo sempre dallo stato  $|u\rangle$ : osserviamo che sull'asse  $x$  nel 50% dei casi otteniamo  $+1$  e nel 50% dei casi  $-1$ , con valore medio quindi nullo. Inoltre se dell'asse  $x$  ritorniamo all'asse  $z$ , troviamo allo stesso modo lo stato  $|u\rangle$  nel 50% dei casi, e lo stato  $|d\rangle$  nei restanti. Siamo portati a due conclusioni:

- La misura quantistica è influenzata dall'atto di misura stesso. Se, una volta noto che lo spin fosse  $|u\rangle$  su  $z$ , ci saremmo aspettati di ottenere zero dalla misura dello spin sull'asse  $x$ , in senso quantistico questo risultato è vero solo in media. Dunque ogni previsione classica sulle misure si realizza solo in media.
- La misurazione di una componente dello spin distrugge ogni informazione pregressa sulla misura di un'altra componente. In sostanza è impossibile misurare (nel senso statistico) con precisione arbitraria due componenti diverse dello spin, ma vi è associata una certa indeterminazione.

Vediamo ora il quadro matematico necessario per fare le corrette predizioni di questi comportamenti.

## 2. LA STRATEGIA

In meccanica quantistica esiste un solo concetto di misura che ha senso pratico, quello di *osservabile*. Delle osservabili siamo interessati a calcolarne i valori medi sulla distribuzione  $|\psi(x)|^2$ , che nel linguaggio dei prodotti scalari sugli spazi di Hilbert si scrivono

$$\langle \psi | \text{osservabile} | \psi \rangle$$

Ci sono due proprietà che richiediamo al concetto di osservabile:

- I valori medi e le probabilità sono numeri reali, dunque richiediamo che, detta  $A$  l'osservabile:

$$\langle \psi | A \psi \rangle = \langle \psi | A \psi \rangle^*$$

per definizione di prodotto hermitiano

$$\langle \psi | A \psi \rangle^* = \langle \psi A | \psi \rangle$$

ma essendo

$$\langle \psi | A \psi \rangle = \langle \psi A^\dagger | \psi \rangle$$

troviamo che deve essere  $A = A^\dagger$ . Ogni osservabile ammissibile deve essere hermitiana.

- Se misuriamo " $A$ " di un sistema che si trova in un certo stato  $|a\rangle$  e otteniamo " $a$ " come risultato, pretendiamo una certa coerenza. Cioè se il sistema rimane nello stato  $|a\rangle$  e misuriamo ancora  $A$ , dobbiamo ottenere sempre  $a$  come risultato, altrimenti non avrebbe senso il concetto di "misurazione di  $A$ ". Allora vogliamo uno scarto quadratico nullo intorno al valore " $a$ "

$$0 = \langle a | (A - a)^2 | a \rangle = \langle a | (A - a)^\dagger | (A - a) a \rangle$$

per l'hermitianità

$$= \langle a | (A - a) | (A - a) a \rangle \equiv \| (A - a) | a \rangle \|^2$$

dunque  $(A - a) | a \rangle = 0$ , per cui lo stato  $|a\rangle$  deve essere autostato di  $A$  con autovalore " $a$ ".

I valori misurabili delle osservabili in meccanica quantistica sono solo i loro autovalori e nessun altro, poiché nessun'altra definizione avrebbe senso statistico pratico. L'hermitianità garantisce poi che tutti i valori misurabili siano reali, poiché gli autovalori di una matrice hermitiana sono reali.

Detto ciò, non tutti gli stati di un sistema sono autostati dell'osservabile che prendiamo in considerazione. Tuttavia un altro risultato importantissimo dell'hermitianità su uno spazio di Hilbert è che gli autostati di  $A$  formano una base completa ortonormale, per cui qualunque altro stato  $|\Psi\rangle$  è esprimibile come combinazione degli autostati  $|a_j\rangle$  dell'osservabile che si considera

$$|\Psi\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle \quad (2.1)$$

dove

$$c_j \equiv \langle a_j | \Psi \rangle$$

sono le proiezioni sugli autostati.

Ora arriva il problema fondamentale:

Se per "caso" misuriamo il valore " $a_i$ ", allora per "definizione", subito dopo la misura il sistema si troverà nello stato  $|a_i\rangle$ , per quanto dimostrato prima. Ciò significa che se in seguito misuriamo  $N$  volte  $A$ , otteniamo sicuramente  $N$  volte il risultato " $a_i$ " con probabilità 100%. Il punto è che abbiamo esordito con un "se per caso", infatti prima di aver misurato per la prima volta " $a_i$ ", non c'era nessuna garanzia che la misura avrebbe condotto ad " $a_i$ ", ma solo una probabilità. Se il sistema si trovava nella sovrapposizione (2.1), tale probabilità è definita come

$$P_{a_i} = |\langle a_i | \Psi \rangle|^2 \equiv |c_i|^2$$

ogni autovalore di  $A$  ha quindi una certa probabilità di essere misurato. Dalle usuali condizioni di normalizzazione  $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$  si ottiene, considerando l'ortonormalità degli  $|a_i\rangle$

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle &= \sum_i \sum_j c_i^* c_j \langle a_i | a_j \rangle \\ &= \sum_i \sum_j c_i^* c_j \delta_{ij} = \sum_i |c_i|^2 \equiv \sum_i P_{a_i} = 1 \end{aligned}$$

come deve essere: esiste una probabilità per ogni autovalore, e il totale deve fare 1. La domanda più spontanea è: quale era lo stato del sistema prima della misura di  $A$ ? Per via dell'ortogonalità, è chiaro che se misuriamo  $a_j$ , sicuramente prima della misura lo stato non poteva essere  $|a_i\rangle$  con  $i \neq j$  poiché la probabilità di misurare  $a_j$  sarebbe poi stata  $|\langle a_j | a_i \rangle|^2 = 0$ . Ma queste sono le uniche considerazioni che possiamo fare, per il resto non ha senso pratico porsi questa domanda, dato che possiamo determinare lo stato di un sistema solo misurando l'osservabile, ed il concetto di misura è riferito solo agli autostati di  $A$ . Per cui l'unica domanda pratica è: "qual'è la probabilità di trovare quell'autostato se effettuo una misura di  $A$ "?

### 3. LA SOLUZIONE

Grazie a questa impalcatura matematica siamo in grado di concettualizzare i risultati dell'esperimento sullo spin: tutto si riduce a far evolvere il sistema dalla sovrapposizione (2.1) all'autostato  $|a_i\rangle$  dell'osservabile  $A$  tramite una misura di  $A$ , e il processo avviene con una probabilità  $P_{a_i}$ . Questa evoluzione è nota come *collasso della funzione d'onda*. Prima della misura della componente  $z$  dello spin, che chiamiamo "osservabile  $\sigma_z$ ", possiamo immaginare che il sistema si trovi nella sovrapposizione degli autostati di  $\sigma_z$  che sappiamo essere  $|u\rangle$  e  $|d\rangle$  per definizione. La misura di  $\sigma_z$  fa collassare  $|\Psi\rangle$  o su  $|u\rangle$  o su  $|d\rangle$  in maniera probabilistica, dopodiché il sistema si troverà per definizione in uno solo dei due autostati. Quando decidiamo di spostare l'apparato sull'asse  $x$  stiamo cambiando osservabile, chiamiamola  $\sigma_x$ . Abbiamo visto che di un'osservabile possiamo misurare solo gli autovalori, e l'evidenza sperimentale suggerisce che anche  $\sigma_x$  abbia  $\pm 1$  come autovalori. Pertanto la domanda giusta da porsi è: dato che il sistema si trovava prima ad esempio nello stato  $|u\rangle$ , qual'è la probabilità di misurare  $+1$  per  $\sigma_x$ ? Ci stiamo insomma chiedendo quale sia la probabilità che il sistema venga a trovarsi nello stato  $|r\rangle$  sapendo che prima si trovava in  $|u\rangle$ . Per la completezza della base degli autostati di  $\sigma_z$  possiamo scrivere

$$|r\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

e quindi la probabilità è

$$|\alpha_u|^2 = |\langle u | r \rangle|^2 \equiv P_{r,u}$$

Se tale probabilità si realizza, il sistema viene a trovarsi nello stato  $|r\rangle$  e il discorso diventa perfettamente simmetrico se da qui volessimo misurare  $\sigma_z$  o  $\sigma_y$ . A titolo di esempio è possibile dimostrare che le osservabili considerate hanno le seguenti espressioni in rappresentazione matriciale

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui si riconoscono le matrici di Pauli. Si nota che  $\sigma_i^2 = \mathbb{1} \forall i$  per cui le  $\sigma_i$  hanno autovalori  $\pm 1$  come ci si aspetta. Cercando gli autostati di  $\sigma_z$  e l'autostato  $|r\rangle$  di  $\sigma_x$  si trova

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è quindi molto semplice scrivere  $|r\rangle$  in termini di  $|u\rangle$  e  $|d\rangle$

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |d\rangle$$

per cui, coerentemente con i risultati sperimentali, si ha proprio  $P_{r,u} = P_{r,d} = 50\%$ .

Resta un'altra questione da affrontare: in che modo possiamo formalizzare la proprietà che misure di componenti diverse dello spin interferiscono tra di loro distruggendo le informazioni pregresse? Il problema è traducibile nel modo seguente: non è possibile misurare simultaneamente con precisione arbitraria le osservabili  $\sigma_z$  e  $\sigma_x$ . Se pensiamo al concetto di misura tramite gli autostati delle osservabili, è chiaro che la misura potrebbe essere condotta simultaneamente se gli autostati di  $\sigma_z$  fossero autostati anche di  $\sigma_x$ . In tal modo, essendo tutti gli autostati ortogonali tra loro, se otteniamo  $+1$  sull'asse  $z$ , otterremo poi  $\langle r|u\rangle = 0$  sull'asse  $x$ , essendo  $|r\rangle$  autostato ortogonale a  $|u\rangle$ . Tuttavia è evidente che la natura non funziona in questo modo per quanto riguarda lo spin: non esiste una base comune di autostati per le osservabili  $\sigma_x, \sigma_z$ . Matematicamente questa condizione è equivalente ad affermare che  $[\sigma_x, \sigma_z] \neq 0$ . Due osservabili che commutano, d'altro canto, ammettono una base comune di autostati, e quindi la misura di entrambe può essere condotta simultaneamente senza inficiare sull'altra.

Ora che siamo in grado di predire matematicamente il comportamento degli esperimenti quantistici, la domanda fondamentale è la seguente:

*Che significa la misura sperimentale dal punto di vista dell'interazione apparato-sistema?*

A cui si aggiunge una domanda più filosofica: *In che modo l'interazione con l'apparato produce il collasso di  $|\Psi\rangle$  su uno degli autostati dell'osservabile?*

## 4. SISTEMI COMPOSITI

In natura un sistema più grosso è sempre pensabile come la composizione di più sottosistemi, per cui è lecito interessarsi alla trattazione dei *sistemi compositi*. Tali sistemi sono composti da sottosistemi che dispongono dei loro personalissimi spazi di Hilbert, con le loro osservabili e i relativi autostati.

Matematicamente un buon modo per rappresentare la composizione è il prodotto tensoriale. Se si hanno due sistemi  $A$  e  $B$  rispettivamente preparati negli stati  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ , il sistema composito sarà nello stato

$$|ab\rangle \equiv |a\rangle \otimes |b\rangle$$

La notazione  $|ab\rangle$  è da intendersi come segue: lo stato del sistema è rappresentato dallo stato dei suoi sottosistemi:  $A$  si trova nello stato  $|a\rangle$ , mentre  $B$  si trova nello stato  $|b\rangle$ , per cui il sistema totale è nello stato  $|ab\rangle$ .

L'unico modo ragionevole di trattare questo tipo di sistemi è di rispettare la seguente proprietà

- Ogni operatore di ciascun sottosistema agisce sullo stato composito solo sulla componente del proprio sottosistema. Ad esempio se  $A$  è un'operatore del sistema "A"

$$A|ab\rangle = |(Aa)b\rangle$$

dove  $|Aa\rangle$  è il trasformato dello stato  $a$  nel sistema  $A$ .

questa assunzione è ragionevole: se si hanno due sistemi completamente distinti, ad esempio distanti migliaia di anni luce, l'effettuarsi di una trasformazione su di un sottosistema lascia invariato l'altro sottosistema. Il prodotto composito è solo un modo di rappresentare il sistema come un tutt'uno, ed è stato scelto il prodotto tensoriale proprio perché rispetta questa importante proprietà

$$(A \otimes B)(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (|Aa\rangle \otimes |Bb\rangle) \quad (4.1)$$

Ora, tra tutti gli stati composti nello spazio dei prodotti, ne esistono due agli antipodi:

- Lo *stato prodotto*, per il quale possiamo fare accurate previsioni statistiche delle misure sui singoli sistemi costituenti, e tuttavia tali misure non dicono niente sui risultati dell'altro sottosistema
- Lo *stato entangled*, per il quale non possiamo fare nessuna previsione statistica sulle misure dei singoli sistemi, ma, data una misura su un sottosistema, è possibile fare previsioni accurate sulla misura dell'altro sottosistema

Esemplifichiamo tutto ciò ripescando il concetto di spin. Supponiamo che  $A$  e  $B$  preparino il proprio sottosistema negli stati  $|\Psi_a\rangle$  e  $|\Psi_b\rangle$

$$|\Psi_a\rangle = \alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle$$

$$|\Psi_b\rangle = \beta_u |u\rangle + \beta_d |d\rangle$$

un punto fondamentale è la normalizzazione di questi due stati

$$|\alpha_u|^2 + |\alpha_d|^2 = 1$$

$$|\beta_u|^2 + |\beta_d|^2 = 1$$

il prodotto tensoriale fornisce lo stato combinato

$$|\Psi_{a,b}\rangle = (\alpha_u |u\rangle + \alpha_d |d\rangle) \otimes (\beta_u |u\rangle + \beta_d |d\rangle)$$

$$= \alpha_u \beta_u |uu\rangle + \alpha_u \beta_d |ud\rangle + \alpha_d \beta_u |du\rangle + \alpha_d \beta_d |dd\rangle$$

e questo stato è correttamente normalizzato senza nessuna equazione aggiuntiva che leghi i coefficienti  $\alpha, \beta$ , come è facile verificare. Supponiamo che i due sottosistemi vogliano misurare il proprio spin, ciascuno con il proprio apparato ad esempio lungo l'asse  $z$ . Il sottosistema  $A$  misurerà l'osservabile  $\sigma_z$ , il sottosistema  $B$  misurerà  $\tau_z$ . È lecito chiedersi quale sia il valore di aspettazione di  $\sigma_z$  sullo stato composito

$$\langle \Psi_{a,b} | \sigma_z | \Psi_{a,b} \rangle$$

rispettando la proprietà stabilita prima e ricordando che  $|u\rangle$  e  $|d\rangle$  sono autostati con autovalori  $+1$  e  $-1$  si avrà ad esempio  $\sigma_z |ud\rangle = |ud\rangle$ , e  $\sigma_z |du\rangle = |(-d)u\rangle = -|du\rangle$ . Inoltre per costruzione tutti gli stati sono ortogonali tra loro, per cui

$$\langle \sigma_z \rangle_{a,b} = |\beta_u|^2 (|\alpha_u|^2 - |\alpha_d|^2) + |\beta_d|^2 (\alpha_u|^2 - |\alpha_d|^2)$$

$$= (1)(\alpha_u|^2 - |\alpha_d|^2) \equiv \langle \sigma_z \rangle_a$$

Il valore di aspettazione sullo stato composito è lo stesso dello stato singolo. Questa proprietà è generale per tutte le osservabili dei singoli sistemi in questo tipo di stato composito, e tale stato è chiamato *stato prodotto*. Domanda fondamentale: la misura di  $\sigma_z$  su  $A$  ci dice qualcosa sulla misura di  $\tau_z$  su  $B$ ? La domanda è lecita poiché queste misure possono essere condotte simultaneamente, essendo  $[\sigma_z, \tau_z] = 0$ . In termini statistici ci chiediamo se vi sia correlazione tra le due misure, vogliamo cioè studiare

$$\text{Corr}(a, b) = \langle \sigma_z \tau_z \rangle - \langle \sigma_z \rangle \langle \tau_z \rangle \quad (4.2)$$

sullo stato prodotto. Seguendo le solite regole si trova

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{a,b} | \sigma_z \tau_z | \Psi_{a,b} \rangle &= \\ &= |\alpha_u|^2 (|\beta_u|^2 - |\beta_d|^2) - |\alpha_d|^2 (|\beta_u|^2 - |\beta_d|^2) \\ &= (|\alpha_u|^2 - |\alpha_d|^2) (|\beta_u|^2 - |\beta_d|^2) \equiv \langle \sigma_z \rangle \langle \tau_z \rangle \end{aligned}$$

dunque le misure sono completamente scorrelate tra loro,  $\text{Corr}(a, b) = 0$ : in altre parole, da una misura di  $A$  non è possibile conoscere il risultato della misura di  $B$ , i processi sono completamente indipendenti su uno stato prodotto.

D'altra parte esistono alcuni fenomeni in natura che permettono la creazione di *stati entangled*, che sono l'estremo opposto di uno stato prodotto. Uno stato entangled è ad esempio il *singlet*

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|ud\rangle - |du\rangle)$$

Se il sistema  $A$  conduce un'esperimento  $N$  volte per misurare  $\sigma_z$ , in media otterrà

$$\langle s | \sigma_z | s \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

dunque al 50% otterrà "+1" e al 50% "-1": al contrario di prima, abbiamo perso ogni informazione statistica sul sottosistema. Invece se i due sottosistemi misurano  $\sigma_z$  e  $\tau_z$  simultaneamente<sup>1</sup> si ha

$$\sigma_z \tau_z |s\rangle = \sigma_z \frac{1}{\sqrt{2}} (-|ud\rangle - |du\rangle)$$

<sup>1</sup>L'avverbio "simultaneamente" è superfluo. La misura può essere condotta sui due sottosistemi in istanti di

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|ud\rangle + |du\rangle) = -|s\rangle$$

Dunque se consideriamo il sistema composto,  $|s\rangle$  è un'autostato dell'osservabile  $\sigma_z\tau_z$  con autovalore  $-1$ . Ciò significa che se gli esperimenti vengono condotti indipendentemente da  $A$  e  $B$ , i loro spin hanno sempre valori discordi, tale che il prodotto dei risultati faccia  $-1$ . Se il sistema  $A$  misura  $+1$  allora saprà per certo che il sistema  $B$  ha misurato  $-1$ : si ha la massima informazione sull'altro sottosistema, e la minima informazione sul proprio, dato che nulla garantisce ad  $A$  di riottenere  $+1$  al prossimo tentativo, ma è certo che se otterrà  $-1$ , allora  $B$  avrà ottenuto  $+1$ . Per uno stato entangled la correlazione è massima, (in questo caso anticorrelazione). Infatti essendo  $\langle\sigma_z\rangle = \langle\tau_z\rangle = 0$  e  $\langle\sigma_z\tau_z\rangle = -1$  dalla (4.2) si trova

$$\text{Corr}(a,b) = -1$$

## 5. LA MISURA DAL PUNTO DI VISTA DEL SISTEMA: ENTANGLEMENT

Possiamo ora provare a fare una riflessione sulla domanda della sezione 3:

*Che significa la misura sperimentale dal punto di vista dell'interazione apparato-sistema? Occorre analizzare in astratto il concetto di misura.*

I fattori in gioco sono due: il sistema quantistico da misurare e l'apparato sperimentale. Anzitutto va riconosciuto che, per produrre la misura, avviene una qualche interazione tra apparato e sistema. Il passo successivo è di identificare l'apparato come un sistema quantistico a se stante<sup>2</sup>, che è una cosa ragionevole e ci porta alla seguente astrazione:

Se l'apparato è un sistema quantistico, esisterà uno spazio dei suoi stati quantistici. Tornando all'esempio dello spin, l'apparato può restituire tre misure:  $+1$ ,  $-1$  o neutro. Semplificando

tempo diversi, finendo per ottenere lo stesso risultato. Il sottosistema  $A$  può misurare  $\sigma_z$ , trovare  $-1$  e dire "Allora il sottosistema  $B$  dovrà misurare per forza  $+1$ ", indipendentemente dal fatto che  $B$  abbia condotto o meno la misura

<sup>2</sup>Questo è l'approccio di Von Neumann, vedi bibliografia

estremamente possiamo dire che può trovarsi nei tre stati seguenti

- Se misura  $+1$  viene a trovarsi nello stato  $|+1\rangle$
- Se misura  $-1$  viene a trovarsi nello stato  $|-1\rangle$
- Tra una misura e l'altra, si trova nello stato  $|n\rangle$

Se  $|\Psi\rangle$  è lo stato di spin della particella, e  $|\Psi_{app}\rangle$  lo stato dell'apparato, il prossimo passo è di considerare il sistema composito

$$|\Psi\rangle \otimes |\Psi_{app}\rangle$$

Quando misuriamo  $\sigma_z$ , il sistema composito viene a trovarsi evidentemente in uno dei due stati

$$|u, +1\rangle, \quad |d, -1\rangle$$

non può essere diversamente, dato che è proprio così che effettuiamo le misure. Ora concentriamoci su quello che avviene tra una misura e l'altra. Prepariamo l'apparato in modo che inizialmente si trovi nello stato neutro  $|n\rangle$ . Prima di effettuare la misura  $\sigma_z$  supponiamo di preparare il sistema dello spin nello stato

$$|\Psi\rangle = \alpha_u(|u\rangle - |d\rangle)$$

in tale stato vi è uguale probabilità di misurare  $\pm 1$ . Lo stato composito è allora uno *stato prodotto*

$$|\Psi_{a,b}\rangle = \alpha_u(|u, n\rangle - |d, n\rangle)$$

infatti è facile verificare che questo stato è a correlazione nulla. Consideriamo che succede appena effettuiamo la misura di  $\sigma_z$ . Lo stato finale sarà

$$|\Psi_{a,b}\rangle = \alpha_u(|u, +1\rangle - |d, -1\rangle)$$

ma questo è analogo allo stato *singlet* analizzato in precedenza, dunque il sistema si è evoluto in uno stato massimamente correlato. Se vogliamo condurre un parallelismo più stretto, possiamo considerare come agisce sullo stato la composizione di due operatori:  $\sigma_z$  e quello dell'apparato. L'operatore dell'apparato  $\mathcal{A}$  restituisce  $+1$  sullo stato  $|+1\rangle$  e  $-1$  sullo stato

$| -1 \rangle$ . Nonostante questa sia una pura astrazione, notiamo che definendo gli operatori in questo modo, otteniamo

$$\begin{aligned}\sigma_z \mathcal{A} |\Psi_{a,b}\rangle &= \sigma_z \alpha_u (|u, +1\rangle + |d, -1\rangle) \\ &= \alpha_u (|u, +1\rangle - |d, -1\rangle) = |\Psi_{a,b}\rangle\end{aligned}$$

quindi  $\sigma_z \mathcal{A} |\Psi_{a,b}\rangle = |\Psi_{a,b}\rangle$ , lo stato *singlet* è autostato dell'operazione  $\sigma_z \mathcal{A}$  con autovalore  $+1$ . Quindi la correlazione è positiva: se il sistema dello spin viene a trovarsi nello stato  $|u\rangle$ , allora di sicuro tale sottosistema sa che l'apparato è nello stato  $|+\rangle$ , e viceversa. Stesso discorso per lo stato  $|d\rangle$ . Non sappiamo con certezza in che stato verrà a trovarsi lo spin se misuriamo  $\sigma_z$ , ma sappiamo che se l'apparato misura  $-1$ , allora il sottosistema  $\mathcal{A}$  sa per certo che lo spin sarà nello stato  $|d\rangle$ . Questo è il modo in cui funziona l'entanglement: un sottosistema non può fare nessuna previsione statistica rilevante sul proprio stato (nel nostro esempio ogni stato era equiprobabile), ma è in grado di predire con certezza quale sarà lo stato dell'altro sottosistema una volta misurato il proprio. Dal punto di vista astratto questo è proprio il modo in cui potrebbe funzionare il processo della misurazione.

In questo esperimento è cruciale distinguere il ruolo dello sperimentatore dal ruolo del sistema "apparato + spin" che chiamiamo per brevità " $\mathcal{A} + \sigma_z$ ".

- Dal punto di vista di  $\mathcal{A} + \sigma_z$  la misura di uno stato dello spin non è più il risultato del collasso della funzione d'onda su un autostato di  $\sigma_z \mathcal{A}$ , ma è il risultato dell'*entanglement* tra i due sottosistemi "apparato" e "spin".
- Dal punto di vista dello sperimentatore questa astrazione ha cambiato poco o nulla: il risultato della misura è ancora un collasso della funzione d'onda sull'autostato dell'osservabile  $\sigma_z$  tramite la misura dello stato dell'apparato.

A questo punto il passo successivo è di estendere l'astrazione: che succede se includiamo lo sperimentatore  $\mathcal{S}$  nel sistema " $\mathcal{A} + \sigma_z$ "? Matematicamente si tratta di creare un nuovo stato

composito come fatto prima. Ora, dal punto di vista di un osservatore esterno  $\mathcal{O}_1$ , non è collassata nessuna funzione d'onda nel momento in cui  $\mathcal{S}$  controlla l'apparato per misurare  $\sigma_z$ , ma semplicemente  $\mathcal{S}$  è diventato *entangled* con gli altri due sottosistemi:  $\mathcal{S}$ , essendo un sottosistema, non sa predire se si troverà nello stato "ho misurato *up*" o nello stato "ho misurato *down*", ma se viene a trovarsi in uno dei due, allora sa per certo in che stato sarà il sottosistema " $\mathcal{A} + \sigma_z$ ". Tuttavia se  $\mathcal{O}_1$  va a controllare lo stato di  $\mathcal{S}$ , allora avviene un collasso della funzione d'onda ad esempio nello stato in cui  $\mathcal{S}$  ha misurato *down*. E così via: se includiamo  $\mathcal{O}_1$  nel sistema quantistico, dal punto di vista di un osservatore  $\mathcal{O}_2$ , il fatto che  $\mathcal{O}_1$  sia in grado di predire in che stato si trovi il sottosistema " $\mathcal{S} + \mathcal{A} + \sigma_z$ " (una volta rilevato che  $\mathcal{S}$  ha misurato lo stato "*down*" o "*up*") è dovuto all'entanglement tra  $\mathcal{O}_1$  e il sottosistema restante. Il momento in cui  $\mathcal{O}_2$  va a vedere in che stato si trova  $\mathcal{O}_1$  fa collassare tutta la funzione d'onda. Volendo, uno può tracciare di continuo la linea di separazione tra "osservatore" e "sistema", includendo un numero infinito di osservatori. È chiaro che se si postulasse l'esistenza di un "osservatore ultimo", allora non ci sarebbe nessun collasso della funzione d'onda. Tale osservatore privilegiato interpreterebbe tutti gli altri collassi come entanglement, e per costruzione il suo stato rimarrebbe in una sovrapposizione tra tutti gli eventi possibili, eternamente. Questa astrazione non ha evidentemente alcuna utilità pratica.

Una volta intuito in che modo la correlazione quantistica entri in gioco nella misurazione, il prossimo step è provare a comprendere il collasso della funzione d'onda.

## 6. PERCHÉ IL COLLASSO DELLA FUNZIONE D'ONDA È INSODDISFACENTE?

In meccanica quantistica gli stati  $|\Psi\rangle$  possono evolvere nel tempo in due modi:

- *Deterministicamente.* L'evoluzione segue

l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = H|\Psi\rangle \quad (6.1)$$

per la quale vale il principio di sovrapposizione. Il processo dell'evoluzione temporale è quindi descritto da una trasformazione unitaria

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) |\Psi_0\rangle \equiv U(t) |\Psi_0\rangle$$

Tale processo è deterministico: conosciamo l'evoluto in ogni istante  $t$ .

- *Indeterministicamente.* Questa evoluzione è dovuta al processo di misura. Detto  $|j\rangle$  un autostato dell'osservabile misurata, si verifica la transizione

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |j\rangle$$

Tale processo è stocastico, con una probabilità associata data dalla regola di Born  $p = |\langle j|\Psi\rangle|^2$

Da una parte abbiamo che i sistemi evolvono secondo trasformazioni lineari, rispettando il principio di sovrapposizione, dall'altra parte viene completamente a mancare l'unitarietà della trasformazione: il processo è non lineare. Il risultato è che il mondo fisico è spaccato in due: da una parte il mondo *microscopico*, che evolve secondo le sue leggi, dall'altra parte il mondo *macroscopico* che effettua le misure sul primo, e ne fa evolvere gli stati in maniera non lineare, violando così le sue stesse leggi.

Questa distinzione è portata avanti dall'*interpretazione di Copenaghen*: le leggi del mondo microscopico non si applicano a quello macroscopico, nonostante quest'ultimo sia costituito dal primo. È la sconfitta del riduzionismo.

Questa spaccatura ha generato insoddisfazione tra i fisici, quindi si è cercato di saldarla andando a indagare su cosa si celi dietro al processo della misura. Il primo tentativo fu di Von Neumann [1].

## 7. MATRICI DENSITÀ

Von Neumann considerò l'apparato di misura come un sistema quantistico (che chiameremo

"A"), e concettualizzò l'atto della misura come il processo di interazione sistema-apparato descritto da una Hamiltoniana  $H_{AS}$ . In questo approccio il processo di misura si svolge in due fasi:

1. Una *prima fase* in cui si stabilisce l'interazione tra  $A$  e  $S$  per un certo tempo caratteristico  $\tau$ . Lo stato iniziale evolve unitariamente.
2. Una *seconda fase* in cui avviene la transizione da stato puro a stato misto.

Uno stato misto è per definizione un ensemble statistico di stati possibili dei sottosistemi, ed è radicalmente diverso da uno stato puro, in termini di informazioni statistiche sul sistema. Questi aspetti diventano più trasparenti se si utilizzano le matrici densità. È utile evidenziare la differenza tra una matrice densità pura e una mista.

Consideriamo uno *stato puro*, descritto al solito da una base ortonormale  $|\phi\rangle_i$

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |\phi_i\rangle$$

L'operatore densità è definito come il proiettore sullo stato  $|\Psi\rangle$

$$\rho \equiv |\Psi\rangle \langle\Psi| = \sum_i \sum_j c_i c_j^* |\phi_i\rangle \langle\phi_j|$$

$$= |c_1|^2 |\phi_1\rangle \langle\phi_1| + c_1 c_2^* |\phi_1\rangle \langle\phi_2| + c_2 c_1^* |\phi_2\rangle \langle\phi_1| + \dots$$

Dunque nella base  $|\phi_i\rangle$  la matrice densità avrà su ogni elemento  $i$  della diagonale la probabilità associata allo stato  $|\phi_i\rangle$ , e fuori diagonale ci saranno i vari termini detti di *correlazione*

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* & c_1 c_3^* & \dots & \dots & \dots \\ c_2 c_1^* & |c_2|^2 & c_2 c_3^* & \dots & \dots & \dots \\ c_3 c_1^* & c_3 c_2^* & |c_3|^2 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

naturalmente valgono  $\rho^2 = \rho$  e, dalla normalizzazione di  $|\Psi\rangle$ ,  $\text{Tr}\rho = 1$ . Perché è utile definire una matrice densità? Un sistema caratterizzato da uno stato puro può fare previsioni statistiche sulle proprie osservabili servendosi di  $\rho$ .



Sia  $L$  un'osservabile, supponiamo di voler calcolare  $\langle L \rangle$ . Prendiamo una base ortonormale  $|i\rangle$  e consideriamo la traccia di  $\rho L$

$$\begin{aligned}\text{Tr} \rho L &= \text{Tr} |\Psi\rangle \langle \Psi| L \equiv \sum_i \langle i | |\Psi\rangle \langle \Psi| L |i\rangle \\ &= \sum_i \langle \Psi | L |i\rangle \langle i | |\Psi\rangle \\ &= \langle \Psi | L \sum_i |i\rangle \langle i | |\Psi\rangle = \langle \Psi | L \mathbb{1} | \Psi\rangle \equiv \langle L \rangle\end{aligned}$$

essendo per la completezza  $\sum_i |i\rangle \langle i| = \mathbb{1}$ . Vediamo ora la differenza con una matrice densità mista.

Dato un ensemble di stati puri<sup>3</sup>  $|\Phi_i\rangle$  ciascuno assegnato con una probabilità  $p_i$ , l'operatore densità è definito come

$$\rho_{mix} = \sum_i^N p_i |\Phi_i\rangle \langle \Phi_i|$$

questo operatore ha ancora evidentemente traccia 1, ma  $\rho_{mix}^2 \neq \rho_{mix}$ . Gli stati misti possono essere interpretati come la mancanza di informazione da parte dell'osservatore sull'attuale stato del sistema. Ad esempio supponiamo che un nostro collega ci dica di aver preparato il sistema con probabilità  $1/2$  o nello stato  $|u\rangle$  o nello stato  $(|u\rangle + |d\rangle)/\sqrt{2}$ .<sup>4</sup> L'informazione che abbiamo sul sistema è incompleta, dunque è descritta da una matrice mista

$$\rho_{mix} = \frac{1}{2} |u\rangle \langle u| + \frac{1}{4} (|u\rangle + |d\rangle)(\langle u| + \langle d|)$$

che nella base  $\{|u\rangle, |d\rangle\}$  è rappresentata da

$$\hat{\rho}_{mix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha traccia 1, ma  $\rho_{mix}^2 \neq \rho_{mix}$ , dunque il sistema non può in nessun modo essere descritto da uno stato puro. Si può essere portati a pensare che questa situazione sia analoga a quella che si presenta prima di una misura. Prima di una misura non sappiamo infatti in che stato si trova il sistema, e dopo la misura sappiamo per certo che si trova in un autostato dell'osservabile. A meno che non abbiamo

<sup>3</sup>Non necessariamente ortogonali

<sup>4</sup>Notare che questi stati sono entrambi puri.

"preparato" il sistema in un certo stato *prima* della misura, lo stato iniziale è a noi ignoto. Nonostante sia ignoto, questi è comunque puro: infatti non abbiamo motivo di credere che si tratti di un ensemble di possibili stati con probabilità assegnate da "qualcun altro". Eppure l'effetto è esattamente lo stesso: non abbiamo informazione completa sul sistema, proprio come se si trovasse in uno stato misto.

Ripetiamo il ragionamento in dettaglio. Sia  $\mathcal{A}$  l'osservabile con autostati  $|a_i\rangle$ . Subito prima di effettuare la misura il sistema si trova in uno stato ignoto  $|\Psi\rangle$ , che è comunque sviluppabile nella base ortonormale

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$$

La probabilità di selezionare l'autostato  $|a_j\rangle$  dopo la misura è

$$p = |\langle a_j | \Psi \rangle|^2$$

ma questa informazione non ci è di alcuna utilità dato che prima della misura non possiamo conoscere lo stato  $|\Psi\rangle$ : è solo un'interpretazione concettuale del collasso della funzione d'onda su un autostato  $|a_j\rangle$ . Non avendo nessuna informazione sul *prima*, e avendo totale informazione sul *dopo*, non ci rimane che chiederci cosa succeda *durante* il processo della misura. Dal nostro punto di vista, *durante* la misura il sistema può equivalentemente essere descritto da un ensemble statistico di autostati  $|a_i\rangle$  di cui però non conosciamo le probabilità.<sup>5</sup> Quindi possiamo dire che la nostra conoscenza dello stato è descritta da una matrice densità  $\rho_{mix}$  che, per l'ortogonalità delle  $|a_i\rangle$ , è diagonale. Vedremo che secondo l'approccio di Von Neumann questa interpretazione è cruciale per descrivere senza ambiguità i risultati delle misure quantistiche.

## 8. L'APPROCCIO DI VON NEUMANN

Consideriamo l'apparato  $\mathcal{A}$  e il sistema  $\mathcal{S}$  come due sistemi quantistici. Sia  $S$  l'osservabile di

<sup>5</sup>Questa descrizione vale solo durante l'interazione con il sistema tramite il processo della misura, altrimenti quest'ultimo non è forzato in alcun modo a trovarsi su un autostato dell'osservabile

$\mathcal{S}$ . Supponiamo che inizialmente apparato e sistema si trovino nei rispettivi stati  $|A_0\rangle$  e  $|\Psi\rangle$ . Il prodotto tensoriale fornisce lo stato iniziale

$$|\Phi_i\rangle = |A_0\rangle \otimes |\Psi\rangle$$

se  $|A_n\rangle$  è una base ortonormale nello spazio di Hilbert di  $\mathcal{A}$  e  $|s\rangle$  gli autostati di  $\mathcal{S}$

$$|\Phi_i\rangle = \left( \sum_n \alpha_n |A_n\rangle \right) \otimes \left( \sum_s c_s |s\rangle \right)$$

A questo punto il processo della misura si divide in due fasi:

- **Prima fase.**

Questa fase è descritta da una trasformazione unitaria, ed è la parte *deterministica* del processo.  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{S}$  interagiscono tramite una hamiltoniana<sup>6</sup>  $H_{AS}$  per un tempo caratteristico  $\tau$ . Questa interazione stabilisce la correlazione tra  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{A}$ , e lo stato finale è trasformato come

$$|\Phi_f\rangle = \exp\left(-\frac{iH_{AS}\tau}{\hbar}\right) |\Phi_i\rangle$$

per produrre

$$|\Phi_f\rangle = \sum_s q_s |A_s\rangle \otimes |s\rangle \quad (8.1)$$

che è la forma di uno stato entangled. Ricordiamo che per definizione in uno stato entangled i sottosistemi hanno la minima informazione su se stessi, e la massima informazione sull'altro. Dunque ci aspettiamo che i sottosistemi  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{A}$ , nei loro spazi di Hilbert, si trovino in uno stato misto. Per dimostrarlo, calcoliamo l'operatore densità di  $|\Phi_f\rangle$ , che è per definizione uno stato puro<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \rho &= |\Phi_f\rangle \langle \Phi_f| \\ &= \sum_s \sum_k q_s q_k^* |A_s\rangle \langle A_k| \otimes |s\rangle \langle s_k| \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Se la misura è non perturbativa,  $[H_{AS}, \mathcal{S}] = 0$

<sup>7</sup>Si è usata la proprietà  $(|a\rangle \otimes |b\rangle)(\langle a| \otimes \langle b|) = |a\rangle \langle a| \otimes |b\rangle \langle b|$

A questo punto per trovare  $\rho_S$  facciamo la traccia parziale sugli stati di  $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \rho_S &= \text{Tr}_A \rho = \sum_b \langle A_b | \rho | A_b \rangle \\ &= \sum_s |q_s|^2 |s\rangle \langle s| \end{aligned}$$

che è la forma di un operatore densità misto. Il discorso è analogo se vogliamo trovare  $\rho_A$ .

Appurato che la (8.1) rappresenti uno stato entangled, potrebbe sembrare che la descrizione del processo di misurazione sia soddisfacente. Infatti abbiamo ottenuto che misure indipendenti sui sottosistemi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{S}$  sono correlate quantisticamente, come anticipato nella sezione 5, e ora abbiamo anche postulato una possibile origine di questa correlazione: l'hamiltoniana di interazione.

I motivi per cui non possiamo essere soddisfatti di questa descrizione sono, in ordine di importanza crescente:

1. La correlazione tra  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{A}$ , come discusso nella sezione 5, è tale solo dal punto di vista dei due sottosistemi:  $\mathcal{A}$  sa tutto sulla misura di  $\mathcal{S}$  dopo aver effettuato la propria misura, ma lo sperimentatore esterno non può imputare la natura del processo di misura al quantum entanglement (vedasi discorso sull'osservatore ultimo).
2. Teoricamente, *nulla* impedisce la reversibilità del processo per cui

$$|\Phi_i\rangle = U^\dagger |\Phi_f\rangle$$

mentre ci si attende che la trasformazione sia irreversibile affinché abbia senso la definizione stessa di "misura".

3. Non è chiaro in che stato sia registrato il sistema da parte dell'apparato. È infatti possibile, data la forma di stato puro, fare un cambiamento di base nella (8.1) e passare da  $\{|A_s\rangle\}$  a  $\{|A_p\rangle\} = \{\sum_s \langle A_s | A_p \rangle |A_s\rangle\}_p$  dove

$|A_p\rangle$  è un'altra base dello spazio di Hilbert di  $\mathcal{A}$

$$\sum_s q_s |A_s\rangle \otimes |s\rangle \longrightarrow \sum_p b_p |A_p\rangle \otimes |p\rangle$$

dove

$$|p\rangle = (b_p)^{-1} \sum_s \langle A_p | A_s \rangle |s\rangle$$

tali vettori  $|p\rangle$  sono ora interpretabili come gli autostati di un'altra osservabile, la quale non è costretta a commutare con  $S$ . Questo fatto si discosta molto dall'esperienza di tutti i giorni: l'interazione tra apparato e sistema non può far risultare un'ambiguità nella scelta dell'osservabile da misurare.

Il motivo 3) è quello che ci spinge a postulare che lo stato risultate da un processo di misura non possa essere puro: deve essere uno stato misto. Altrimenti la forma pura dello stato  $|\Phi_f\rangle$  permetterebbe un cambiamento di base.

– **In sintesi:**

Quando si effettua una misura non si registra mai il sistema in uno stato dato dalla (8.1), rappresentato da una sovrapposizione degli stati macroscopici dell'apparato  $|A_s\rangle$ . In genere il problema statistico della misura si pone su questi termini: misuro l'apparato  $\mathbf{o}$  nello stato  $X$   $\mathbf{o}$  l'apparato nello stato  $Y$ ; dunque si estrae il risultato da una rosa di stati possibili e mai si trova la sovrapposizione (8.1). Da qui la necessità di passare da stato puro a stato misto: si vuole scegliere tra  $N$  stati<sup>8</sup>, non **un solo** stato che è una sovrapposizione di  $N$  stati. Alla radice di questo problema sta l'aver considerato l'apparato come un sistema quantistico. Questa considerazione era necessaria per instaurare la correlazione quantistica,

<sup>8</sup>Proprio come se estraessimo uno stato da un ensemble misto

ma ora è necessario far riemergere il comportamento classico dell'apparato. Inoltre, in che modo emerge la base di autostati di  $S$  dalla (8.1) quando otteniamo il risultato della misura?

Per risolvere questi problemi, Von Neumann costruì una seconda fase del processo.

- **Seconda fase.** Questa fase del processo è: non-unitaria, non-reversibile e non-deterministica. Come accennato, si tratta della transizione

$$\rho_{puro} \longrightarrow \rho_{mix}$$

nel nostro esempio

$$\begin{aligned} & \sum_s \sum_k q_s q_k^* |A_s\rangle \langle A_k| \otimes |s\rangle \langle s_k| \\ & \longrightarrow \sum_s |q_s|^2 |A_s\rangle \langle A_s| \otimes |s\rangle \langle s| \end{aligned}$$

tutti i termini misti presenti nella matrice densità pura vengono soppressi: da questo punto di vista, il risultato della misura è "estraibile" da un ensemble statistico di autostati dell'osservabile, con probabilità ignote. Si noti che ora non c'è ambiguità sugli stati possibili letti dall'apparato. La seconda fase del processo ha in qualche modo eliminato l'ambiguità, facendo emergere la cosiddetta *pointer basis*[2]<sup>9</sup>, cioè gli autostati di  $S$ . L'osservatore può ora leggere il risultato della propria misura: questa lettura seleziona l'autostato dall'ensemble e provoca il collasso non-unitario della funzione d'onda. La transizione  $\rho_{pura} \rightarrow \rho_{mix}$  è un processo non unitario<sup>10</sup> e irreversibile. La sua esistenza deriva dalla necessità di fare emergere una "*classicalità*" nel comportamento dell'apparato, che all'inizio del processo di Von Neumann era visto come un sistema quantistico. A questo punto uno può porsi due domande legittime:

<sup>9</sup>"Pointer basis" nel gergo sperimentale deriva dal puntatore degli apparati negli esperimenti sullo spin. D'ora in poi lo usiamo come sinonimo di "autostati dell'osservabile".

<sup>10</sup>Non esiste una trasformazione unitaria che mandi una matrice di proiezione in una matrice tale che  $\rho^2 \neq \rho$

1. Esiste un modo per giustificare la transizione da "apparato quantistico" a "apparato classico"?
2. In che modo emerge la pointer basis nel processo di misura?

La teoria della decoerenza quantistica prova a rispondere a entrambe le questioni in un colpo solo.

## 9. LA DECOERENZA QUANTISTICA

La difficoltà maggiore nel riallacciare le due fasi del processo di Von Neumann sta nel fatto che solo la prima delle due obbedisce all'equazione di Schrödinger. Per aggirare questo problema è possibile notare che l'equazione di Schrödinger è valida solo per sistemi isolati [3]; per quanto riguarda la seconda fase del processo quanto detto implicherebbe allora due cose:

1. Tale fase è descritta da un'altra fisica a noi ignota, con un'equazione che non conosciamo.
2. In tale fase il sistema non è isolato.

Se ottimisticamente scegliamo la seconda, siamo portati ad estendere il sistema  $S + \mathcal{A}$  includendo anche l'ambiente esterno, che chiamiamo  $\mathcal{E}$ . A questo punto il sistema  $S + \mathcal{A} + \mathcal{E}$  è isolato e vale l'equazione di Schrödinger, con la complicazione che ora andrebbero inclusi nell'equazione i gradi di libertà di ogni atomo presente in  $\mathcal{E}$ . Secondo la decoerenza quantistica, questo non è un punto debole, anzi è il punto fondamentale: l'interazione tra  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{E}$  è proprio ciò che fornisce all'apparato la sua "classicalità". Così come la perturbazione di uno specchio d'acqua si propaga per forme circolari e diminuisce all'aumentare della distanza percorsa, le correlazioni quantistiche spurie<sup>11</sup> instaurate nella prima fase del processo tra  $S$ ,  $\mathcal{A}$ , e ogni atomo di  $\mathcal{E}$ , si propagano a tutti gli atomi dell'ambiente, diminuendo

<sup>11</sup>Gli elementi fuori diagonale visti nella prima fase del processo.

di entità, in modo che dopo un tempo caratteristico  $\tau$  emerge il comportamento classico dell'apparato nella pointer basis. La prossima difficoltà è logica: se scriviamo l'equazione di Schrödinger includendo anche gli stati di tutti gli atomi dell'ambiente, ad interazione avvenuta cosa ce ne facciamo? Per comprendere la strategia possiamo fare un'analogia con un problema di fisica classica.

Nel moto Browniano siamo interessati a un percorso medio che sotto certe assunzioni viene perturbato da tutto l'ambiente che lo circonda secondo regole statisticamente prevedibili. Per scrivere queste regole bisogna tenere in conto degli infiniti gradi di libertà di  $\mathcal{E}$ , ed una volta ottenuto l'effetto dinamico voluto si procede integrando su tutti i gradi di libertà che non ci interessano. Allo stesso modo nella teoria della decoerenza si fa la traccia sui gradi di libertà dell'ambiente: questa operazione matematica è responsabile della transizione  $\rho_{puro} \rightarrow \rho_{mix}$ . Abbiamo allora risposto alle due domande della sezione precedente: abbiamo giustificato la "classicalità" dell'apparato dicendo che le correlazioni quantistiche vengono "lavate via" dall'interazione con i numerosissimi atomi dell'ambiente<sup>12</sup>, e abbiamo ricavato che la pointer basis emerge proprio a causa dell'operazione traccia.

Questo non risolve il problema del collasso della funzione d'onda: dopo la misura si ha ancora il collasso in un solo elemento della pointer basis, anche se la teoria della decoerenza fornisce ora una motivazione per la comparsa di questa "selezione".[2]

Tuttavia questo approccio ci permette di vederci meglio su un altro fatto interessante: l'irreversibilità del processo

$$\rho_{pura} \rightarrow \rho_{mix}$$

è collegato a una perdita di informazione statistica. Nel passaggio dalla fase 1 alla fase 2 si passa dall'aver tutta l'informazione sul sistema ad averne solo parziale: i termini di correlazione fuori diagonale sono scomparsi. Tornando alla definizione di stato misto, si ripensi

<sup>12</sup>o quantomeno diventano trascurabili dopo un certo tempo  $\tau$

all'esempio del nostro collega che preparava il sistema in un certo stato, dicendoci *solo le probabilità* che tale stato fosse  $X$ ,  $Y$  o qualche altro: in tale contesto abbiamo solo informazione parziale, mentre il nostro collega ha informazione totale. Secondo la decoerenza quantistica tale informazione aggiuntiva presente nella prima fase del processo di misura<sup>13</sup> viene versata sull'ambiente e dispersa irreversibilmente, come l'acqua traboccante da un secchio pieno. La perdita di informazione è strettamente collegata con l'aumento dell'entropia[4], motivo per cui la seconda fase del processo è irreversibile:  $\Delta S > 0$ .

## 10. UN SEMPLICE ESEMPIO DI DECOERENZA QUANTISTICA

Seguendo l'approccio di Zurek[5] possiamo fornire un esempio molto semplice della decoerenza quantistica in azione. Consideriamo ancora lo spin di una particella. Scriveremo gli autostati di  $\sigma_z$  al solito come  $|u\rangle$  e  $|d\rangle$ . Gli stati dell'apparato siano  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ , ortonormali tra loro e tali che

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pm\rangle + |\mp\rangle) \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pm\rangle - |\mp\rangle) \end{aligned}$$

con  $|\pm\rangle$  e  $|\mp\rangle$  ortonormali, i quali rappresentano lo stato eccitato e lo stato fondamentale dell'apparato (non ci preoccupiamo di descriverli fisicamente, servono a scopo di definizione). Supponiamo che gli stati iniziali di  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{S}$  siano

$$\begin{aligned} |A_i\rangle &= |+\rangle \\ |s_i\rangle &= a|u\rangle + a|d\rangle \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Tale informazione è definita *aggiuntiva* nel senso classico: l'entanglement tra i sistemi in gioco è un tipo di correlazione che non può essere sfruttata in termini classici, dunque è ridondante ai nostri occhi. Infatti aggiunge informazione sugli altri sottosistemi solo relativamente al singolo sottosistema. Tuttavia non ci è molto utile sapere (qualunque cosa voglia dire) che il sottosistema dell'apparato "sappia" che lo spin deve essere up.

con  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Lo stato iniziale di  $\mathcal{S} + \mathcal{A}$  è allora

$$|\Phi_i\rangle = |A_i\rangle \otimes |s_i\rangle = a|+\rangle \otimes |u\rangle + b|+\rangle \otimes |d\rangle$$

Seguiamo la fase 1 del processo di Von Neumann considerando una Hamiltoniana di interazione dipendente dal parametro  $g$

$$H^{AS} = \hbar g i(|\pm\rangle \langle \mp| - |\mp\rangle \langle \pm|) \otimes (|u\rangle \langle u| - |d\rangle \langle d|)$$

Dopo l'interazione lo stato finale è

$$\begin{aligned} |\Phi_f(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{iH^{AS}t}{\hbar}\right) |\Phi_i\rangle \\ &= e^{-ig(\hat{A} \otimes \hat{S})t} (a|+\rangle \otimes |u\rangle + b|+\rangle \otimes |d\rangle) \end{aligned}$$

avendo definito

$$\begin{aligned} \hat{A} &\equiv i(|\pm\rangle \langle \mp| - |\mp\rangle \langle \pm|) \\ \hat{S} &\equiv (|u\rangle \langle u| - |d\rangle \langle d|) \end{aligned}$$

le parti di hamiltoniana relative ai due sottosistemi. Usando lo sviluppo in serie

$$|\Phi_f(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n t^n (-i)^n}{n!} (\hat{A})^n \otimes (\hat{S})^n |\Phi_i\rangle$$

Per eseguire il calcolo possiamo scrivere  $|+\rangle$  nella base degli autostati di  $\hat{A}$

$$|+\rangle = \left(\frac{1+i}{2}\right) |\top\rangle + \left(\frac{1-i}{2}\right) |\perp\rangle$$

dove  $\hat{A} |\top\rangle = |\top\rangle$  e  $\hat{A} |\perp\rangle = -|\perp\rangle$ . Dunque

$$\hat{A}^n |+\rangle = \left(\frac{1+i}{2}\right) |\top\rangle + (-1)^n \left(\frac{1-i}{2}\right) |\perp\rangle$$

e d'altra parte  $|u\rangle$  e  $|d\rangle$  sono gli autostati di  $\hat{S}$  per cui  $\hat{S} |u\rangle = |u\rangle$ ,  $\hat{S} |d\rangle = -|d\rangle$  dunque si ha infine

$$\begin{aligned} |\Phi_f(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n t^n (-i)^n}{n!} a \left(\frac{1+i}{2}\right) |\top\rangle \otimes |u\rangle \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n t^n (-i)^n}{n!} (-1)^n a \left(\frac{1-i}{2}\right) |\perp\rangle \otimes |u\rangle \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n t^n (-i)^n}{n!} (-1)^n b \left(\frac{1+i}{2}\right) |\top\rangle \otimes |d\rangle \end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n t^n (-i)^n}{n!} b \left( \frac{1-i}{2} \right) |\perp\rangle \otimes |d\rangle$$

Tornando alla notazione esponenziale

$$= \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-igt+i\pi/4} |\top\rangle \otimes |u\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{igt-i\pi/4} |\perp\rangle \otimes |u\rangle \\ + \frac{b}{\sqrt{2}} e^{igt+i\pi/4} |\top\rangle \otimes |d\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}} e^{-igt-i\pi/4} |\perp\rangle \otimes |d\rangle$$

ed esprimendo  $|\top\rangle$  e  $|\perp\rangle$  di nuovo in funzione di  $|\pm\rangle$  e  $|\mp\rangle$

$$= [\cos(\pi/4 + gt) |\mp\rangle + \sin(\pi/4 + gt) |\pm\rangle] \otimes a |u\rangle \\ + [\cos(\pi/4 - gt) |\mp\rangle + \sin(\pi/4 - gt) |\pm\rangle] \otimes b |d\rangle$$

Ora, dopo un tempo

$$t = \frac{\pi}{4g} \equiv \tau$$

$$|\Phi_f(\tau)\rangle = a |\pm\rangle \otimes |u\rangle + b |\mp\rangle \otimes |d\rangle$$

cioè il sistema si è evoluto in uno stato entangled, nel senso che le sotto-matrici densità dei singoli sistemi sono miste. Per dimostrarlo, calcoliamo anzitutto l'operatore  $\rho$  per lo stato puro  $|\Phi_f(t)\rangle$

$$\rho = |\Phi_f(t)\rangle \langle \Phi_f(t)| = |a|^2 |\pm\rangle \langle \pm| \otimes |u\rangle \langle u| \\ + |b|^2 |\mp\rangle \langle \mp| \otimes |d\rangle \langle d| \\ + ab^* |\pm\rangle \langle \mp| \otimes |u\rangle \langle d| \\ + ba^* |\mp\rangle \langle \pm| \otimes |d\rangle \langle u|$$

Per esempio calcoliamo  $\rho_S$  tracciando via gli elementi di  $\mathcal{A}$

$$\rho_S = |a|^2 |u\rangle \langle u| + |b|^2 |d\rangle \langle d|$$

con  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  questa è una matrice mista nella base  $|u\rangle, |d\rangle$

$$\hat{\rho}_S = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}$$

essendo  $\hat{\rho}_S^2 \neq \hat{\rho}_S$ . Dopo l'interazione abbiamo ottenuto quindi due distinti collassi delle sotto-matrici densità  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{S}$

$$\rho_{A,pura} \implies \rho_{A,mix}$$

$$\rho_{S,pura} \implies \rho_{S,mix}$$

che manifesta il trasferimento di informazione tra  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{A}$  attraverso le correlazioni quantistiche, e tali correlazioni sono proprio gli elementi fuori diagonale della matrice densità finale  $\hat{\rho}$ , che tuttavia è pura, e soffre dei problemi enunciati precedentemente. Come soluzione a ciò, viene naturale associare all'operazione traccia il collasso  $\rho_{pura} \rightarrow \rho_{mix}$ : se questo processo vale nei singoli sottosistemi, si può supporre che guardando  $\mathcal{S} + \mathcal{A}$  come un sottosistema di  $\mathcal{E} + \mathcal{S} + \mathcal{A}$  si possa ottenere lo stesso effetto. Ma bisogna allora far sì che  $\mathcal{E}$  sia in grado di disperdere l'informazione in maniera irreversibile: vedremo che ciò può essere ottenuto portando a infinito il numero dei sottosistemi ambiente. Tuttavia è possibile, per scopi didattici, ricostruire lo stesso effetto anche usando l'ambiente più semplice possibile: un singolo atomo. Indicheremo gli stati dell'atomo con la notazione  $|; \rangle$ , ad esempio  $|+\rangle, |\pm\rangle, |\top\rangle$  ecc. Con

$$|+\rangle = \frac{1+i}{2} |\perp\rangle + \frac{1-i}{2} |\top\rangle \\ |\perp\rangle = \frac{|\pm\rangle - i|\mp\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\top\rangle = \frac{|\pm\rangle + i|\mp\rangle}{\sqrt{2}}$$

Dopo l'interazione iniziale tra  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{A}$ , lo stato iniziale del sottosistema  $\mathcal{S} + \mathcal{A}$  è, come calcolato prima

$$\Phi_i = a |\pm\rangle \otimes |u\rangle + b |\mp\rangle \otimes |d\rangle$$

Se supponiamo che lo stato iniziale dell'atomo-ambiente sia  $|+\rangle$  il sistema  $\mathcal{E} + \mathcal{S} + \mathcal{A}$  si troverà inizialmente nello stato

$$\Phi_i = (a |\pm\rangle \otimes |u\rangle + b |\mp\rangle \otimes |d\rangle) \otimes |+\rangle$$

Ora avviene l'interazione tra apparato e atomo-ambiente tramite

$$H^{AE} = g_1 (|\perp\rangle \langle \perp| - |\top\rangle \langle \top|) \otimes (|\pm\rangle \langle \pm| - |\mp\rangle \langle \mp|)$$

con lo stesso identico procedimento di prima si ottiene lo stato finale al tempo

$$\tau_1 = \frac{\pi}{4g_1}$$

$$|\Phi_f(\tau_1)\rangle = \exp\left(\frac{-iH^{AE}\tau_1}{\hbar}\right)|\Phi_i\rangle$$

$$= a|\pm\rangle \otimes |\pm\rangle \otimes |u\rangle + b|\mp\rangle \otimes |\mp\rangle \otimes |d\rangle$$

L'operatore densità è

$$\rho = |a|^2|\pm\rangle\langle\pm| \otimes |\pm\rangle\langle\pm| \otimes |u\rangle\langle u| \otimes |\pm\rangle\langle\pm| +$$

$$+ ab^*|\pm\rangle\langle\mp| \otimes |\mp\rangle\langle\pm| \otimes |u\rangle\langle d| \otimes |\pm\rangle\langle\mp|$$

$$+ a^*b|\mp\rangle\langle\pm| \otimes |\pm\rangle\langle d| \otimes |u\rangle\langle\mp| \otimes |\pm\rangle\langle\pm|$$

$$+ |b|^2|\mp\rangle\langle\mp| \otimes |\mp\rangle\langle\mp| \otimes |d\rangle\langle d| \otimes |\mp\rangle\langle\mp|$$

che è ancora puro, ma ora questa "purezza" riguarda il sistema  $\mathcal{E} + \mathcal{A} + \mathcal{S}$ , mentre a noi interessa solo il sottosistema  $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ , quindi possiamo fare la traccia parziale sugli stati di  $\mathcal{E}$

$$\rho_{S+A} = \text{Tr}_{\mathcal{E}}\rho = |a|^2|u\rangle\langle u| \otimes |\pm\rangle\langle\pm| +$$

$$+ |b|^2|d\rangle\langle d| \otimes |\mp\rangle\langle\mp|$$

e questa è la forma di un operatore densità misto: l'operazione di traccia ha restituito il collasso  $\rho_{S+A,puro} \rightarrow \rho_{S+A,mix}$ . La "classicità" del sistema  $\mathcal{S} + \mathcal{A}$  è emersa dall'interazione con l'ambiente, dal momento che gli effetti di correlazione quantistica (elementi fuori diagonale) sono stati "lavati via". Questa classicità è quella che si osserva negli esperimenti (se la intendiamo come il comportamento statistico della misura).

Dopo aver letto l'esempio precedente, uno potrebbe tuttavia insospettirsi della sua artificiosità. Il fatto di aver scelto un istante preciso di tempo  $\tau$  come termine dell'interazione può sembrare poco giustificato, ed inoltre nulla vieterebbe allo stato di continuare ad interagire anche dopo il tempo  $\tau$ . Come dimostrato da Zurek[5] il risultato da noi ottenuto non è un artificio, ma vale anche in generale: basta aumentare il numero di atomi-ambiente. In questo caso l'hamiltoniana di interazione apparato-atomi è

$$H_k^{AE} = -g_k(|\perp\rangle\langle\perp| - |\top\rangle\langle\top|)_k \otimes$$

$$\otimes (|\pm\rangle\langle\pm| - |\mp\rangle\langle\mp|) \prod_{j \neq k}^N \mathbb{1}_j$$

A un tempo arbitrario  $t$ , lo stato finale è

$$|\Psi(t)\rangle = a|u\rangle \otimes |\pm\rangle \prod_{k=1}^N [\alpha_{k\uparrow}(t)|\perp\rangle + \beta_{k\uparrow}(t)|\top\rangle]$$

$$+ b|d\rangle \otimes |\mp\rangle \prod_{k=1}^N [\alpha_{k\downarrow}(t)|\perp\rangle + \beta_{k\downarrow}(t)|\top\rangle]$$

Dove

$$\alpha_{k\uparrow} = \alpha_k \exp(-ig_k t) \quad , \quad \alpha_{k\downarrow} = \alpha_k \exp(ig_k t)$$

$$\beta_{k\uparrow} = \beta_k \exp(ig_k t) \quad , \quad \beta_{k\downarrow} = \beta_k \exp(ig_k t)$$

in cui  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  sono fissati dalle condizioni iniziali.

Facendo la traccia parziale sugli stati dell'ambiente

$$\rho_{S+A} = |a|^2|u\rangle\langle u| \otimes |\pm\rangle\langle\pm| + |b|^2|d\rangle\langle d| \otimes |\mp\rangle\langle\mp|$$

$$+ z(t)ab^*|u\rangle\langle d| \otimes |\pm\rangle\langle\mp|$$

$$+ z(t)^*a^*b|d\rangle\langle u| \otimes |\mp\rangle\langle\pm|$$

in cui

$$z(t) \equiv \prod_{k=1}^N [\cos(2g_k t) + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin(2g_k t)]$$

è il fattore che fornisce lo smorzamento della correlazione e ha modulo  $|z(t)| \ll 1$ , ed è responsabile della sparizione dei termini fuori diagonale per tempi lunghi dall'inizio dell'interazione<sup>14</sup>. Il fatto che il sistema sia aperto garantisce che  $z(t)$  non riassuma mai dei valori vicino a  $z(0) = 1$ . L'informazione non è distrutta, ma continua a propagarsi indefinitamente lontano da dove è stata prodotta, analogamente alle onde circolari sullo specchio d'acqua.

<sup>14</sup>In realtà il problema va analizzato più in dettaglio. Vanno fatte alcune ipotesi sui parametri hamiltoniani  $\{g_k\}$ . In particolare se tali parametri sono scelti casualmente, uno può dimostrare che in media  $\langle z(t) \rangle = 0$ . Inoltre essendo (con  $\gamma_k \equiv ||\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2|$ )

$$|z(t)|^2 = \prod_{k=1}^N [\cos^2(2g_k t) + \gamma_k^2 \sin^2(2g_k t)]$$

In media su un periodo i seni e i coseni producono dei fattori 1/2 per cui

$$\langle |z(t)|^2 \rangle = \prod_{k=1}^N [(1 + \gamma_k^2)/2]$$

e quindi  $\langle |z(t)|^2 \rangle \ll 1$  a meno che non sia  $\gamma_k = 1$  che sarebbe il caso molto improbabile in cui tutti gli atomi dell'ambiente sono in un autostato di  $H^{AE}$ .

---

## 11. CONCLUSIONI

Da quanto detto sulla decoerenza, è chiaro che il collasso della funzione d'onda permane, e questo è quanto di meno "classico" si possa avere come comportamento. La decoerenza aiuta però a giustificare concettualmente la comparsa di una pointer basis (nel nostro esempio sono gli stati  $|\pm\rangle, |\mp\rangle$ , correlati con gli autostati dell'osservabile  $\sigma_z$ ,  $|u\rangle, |d\rangle$ ) e questo è un risultato molto interessante: nell'atto della misura, i possibili risultati sono estraibili da una rosa di stati "selezionati" durante l'interazione tra apparato e ambiente.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] J. Von Neumann. "*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*". Princeton University Press, (1955)
- [2] W. H. Zurek. "*Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?*". Phys. Rev. D 24:1516-1525 (1981).
- [3] H. D. Zeh, "*On the irreversibility of time and observation in quantum theory*". Academic Press, New York (1971).
- [4] B. S. DeWitt and N. Graham, "*The Many-World Interpretation of Quantum Mechanics?*" Princeton University Press, Princeton (1973).
- [5] W. H. Zurek. "*Information transfer in quantum measurements: irreversibility and amplification*". Lecture Notes from NATO Advanced Study Institute held in Bad Windsheim, West Germany, August 17-30, 1981.