Come l'elettromagnetismo nasce dal principio di relatività

Matteo Parriciatu

Premessa

Senza alcuna pretesa di sviscerarla nei minimi dettagli, possiamo trarre gioia nel derivare la teoria di Maxwell dal solo principio di relatività einsteiniano, sposando "lo spirito" della teoria classica dei campi. L'artificiosità dei ragionamenti di questa nota è dovuta al fatto che sappiamo già dove vogliamo arrivare, tuttavia l'esercizio che segue è considerato dall'autore come di grande ispirazione per avvicinarsi a ciò che fanno i fisici moderni quando cercano le nuove teorie.

I princìpi

Alcuni autori[1] hanno notato come i princìpi della relatività ristretta possano essere visti come delle garanzie di "semplicità" delle teorie fisiche: queste ultime devono essere scrivibili in maniera semplice da una classe speciale di osservatori. L'esistenza di questi è garantita enunciando un
principio 0 [di Inerzia]: *Esistono dei sistemi di riferimento in cui i corpi non soggetti a forze si muovono di moto rettilineo uniforme.*
Tali sistemi sono detti inerziali[1], e le descrizioni che questi osservatori possono fare dei fenomeni devono essere regolamentate da altri due princìpi

1. **Principio di relatività**: *Le leggi fisiche hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.* [Tutti gli osservatori inerziali sono fisicamente equivalenti].

2. **Postulato sulla velocità della luce**: *La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dal moto della sorgente.*

È importante porre enfasi sul fatto che la forma stessa delle leggi fisiche debba obbedire ai princìpi sopra enunciati. Se una papabile legge fisica non risulta covariante quando trasformata da un SRI ad un altro, allora non può essere una legge fisica.
Nell'ottica di questi princìpi svolgeremo i conti nello spazio di Minkowski con la metrica $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ in cui le trasformazioni tra un SRI ed un altro sono le trasformazioni di Lorentz Λ^μ_ν tali che $\Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\tau g_{\mu\nu} = g_{\rho\tau}$.
Il nostro scopo è derivare la più semplice teoria classica di campo che sia covariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, per poi scoprire che si tratta della teoria elettromagnetica di Maxwell.

Campo e Particella

Nella teoria classica, particelle e campi sono due entità distinte e di pari importanza. In gergo si usa dire:

[1] D'ora in avanti li chiameremo SRI per brevità

Il campo dice alla particella come muoversi, la particella dice al campo che forma assumere

Un campo agisce sulla particella determinandone la dinamica, mentre la particella agisce sul campo in funzione di sorgente, determinandone la forma.
Tutte le leggi fisiche devono discendere da un principio di azione stazionaria. Se trattiamo campo e particella come due entità distinte, dovremo avere:

- Un'azione per la particella che indichiamo con $\mathcal{A}_{part}$
- Un'azione per il campo, che indichiamo con $\mathcal{A}_{field}$

Per il principio di relatività richiediamo che $\mathcal{A}_{part}$ e $\mathcal{A}_{field}$ siano quantità invarianti sotto trasformazioni di Lorentz.[2] È un fatto generale che la costruzione di una teoria classica di campo si traduca quindi in una ricerca di quantità invarianti sulle quali far agire il principio di azione stazionaria.

Azione per la particella

Per cominciare scriviamo l'azione per una particella libera. Mettiamoci alla ricerca delle più semplici quantità invarianti per caratterizzare l'azione.
Una particella è caratterizzata dalla sua massa m, che è una quantità relativisticamente invariante. Tuttavia se per costruire $\mathcal{A}_{part}$ ci limitassimo solo a m le equazioni del moto sarebbero noiose. La più semplice quantità invariante non banale nello spazio di Minkowski è invece l'intervallo di tempo proprio[3] $d\tau$. Per corrispondenza con il caso non relativistico, possiamo moltiplicare m e $d\tau$ e definire l'azione come (usando $c = 1$)

$$\mathcal{A}_{part}^{free} = -m \int d\tau \equiv -m \int \sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2} dt$$

Se la particella non è libera, ma è immersa in un campo, dovremo sommare all'ultima equazione un termine di interazione $\mathcal{A}_{part}^{int}$. Il campo potrebbe essere semplicemente uno scalare $\phi(t, \vec{x})$ o essere sensibile alla direzione nello spazio-tempo e presentarsi con 4 componenti. La prima possibilità è meno interessante, in quanto nella sua versione più semplice genererebbe le equazioni di Newton in versione relativistica per un qualche potenziale $\phi(t, \vec{x})$.[4]
Supponiamo invece che il campo sia un quadrivettore definito da

$$A_\mu \equiv (A_0, A_1, A_2, A_3) = A_\mu(t, \vec{x})$$

Le regole del gioco vogliono che troviamo un modo di inserire A_μ nell'espressione di $\mathcal{A}_{part}^{nt}$ in modo da farla risultare invariante. Le strategie più naturali per ottenere uno scalare a partire da un quadrivettore sono:

- Calcolarne il modulo $A_\mu A^\mu = (A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2$
- Accoppiarlo con un altro quadrivettore contraendo gli indici $B^\mu A_\mu$

[2] L'invarianza dell'azione implica la covarianza delle leggi del moto. Per vederlo uno può partire dal fatto che se vengono soddisfatte le equazioni di Eulero-Lagrange allora l'azione è stazionaria su un certo valore. Poiché l'azione è uno scalare di Lorentz, questo valore stazionario è un invariante; quindi la dinamica del sistema deve essere covariante (la traiettoria evolve in modo da rendere l'azione nuovamente stazionaria sullo stesso valore: l'unico modo di farlo è che le leggi siano covarianti).

[3] Dimostrazione: nel sistema istantaneamente solidale alla particella, se consideriamo due eventi vicini $(dX'^0, d\vec{X}') \equiv (c\,d\tau, 0))$ (poiché la particella è ferma). Si ha $dX'^\mu dX'_\mu = ds^2 = c^2 d\tau^2$. Per il sistema di laboratorio si ha invece $dX^\mu dX_\mu = ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2 = c^2 dt^2 (1 - |\vec{\beta}|^2)$ da cui $d\tau = 1/\gamma dt$.

[4] La versione più semplice di lagrangiana di particella per un campo scalare è $\mathcal{L} = -md\tau - g\phi(t, \vec{x})$ che è tipica in meccanica classica. Una versione leggermente più interessante si ottiene spostando il termine ϕ nella nuova posizione $\rightarrow -(m + g\phi(t, \vec{x}))d\tau$ e quello che si ottiene è un prototipo di campo di Higgs (se $\phi(t, \vec{x})$ assume un valore fisso in una certa regione di spazio, $m + \phi$ si comporta come una massa per la particella).

Per ora limitiamoci a scegliere la seconda opzione, rimandando a un secondo momento la giustificazione di tale scelta.
Chi scegliamo come B^μ? Il più banale quadrivettore nello spazio di Minkowski è quello delle coordinate.
Se $dX^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$ è un tratto infinitesimo della linea di universo della particella, possiamo supporre che, per ogni pezzetto di traiettoria, l'azione sia proporzionale al prodotto tra il segmento dX^μ e il valore del campo $A_\mu(t, \vec{x})$ in quel punto. L'espressione che otteniamo è invariante

$$d\mathcal{A}_{part}^{int} \propto dX^\mu A_\mu$$

Chiamiamo "e" la costante di accoppiamento tra campo e particella, allora sommando tutti i contributi sulla traiettoria

$$\mathcal{A}_{part}^{int} = e \int dX^\mu A_\mu$$

Vogliamo ora riscrivere quest'ultimo termine per renderlo più simile alla forma $\int dt$, che è il modo usuale in cui si scrive l'azione. Notiamo che basta fare la seguente manipolazione

$$\int dX^\mu A_\mu = \int \frac{dX^\mu}{dt} A_\mu dt \equiv \int \dot{X}^\mu A_\mu dt$$

L'azione per la particella nel campo è allora

$$\mathcal{A}_{part} = \int \left(-m\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2} + e\dot{X}^\mu A_\mu \right) dt \tag{1}$$

Possiamo quindi definire la lagrangiana

$$L_{part} = -m\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2} + e\dot{X}^\mu A_\mu(t, \vec{x}) \tag{2}$$

Una lagrangiana invariante è sempre il punto di partenza per ogni aspirante teoria di campo. La (2) è la più semplice lagrangiana invariante non banale che potevamo costruire a partire esclusivamente da:

- Il tempo proprio della particella $d\tau$
- Un tratto infinitesimo della sua linea di universo dX^μ
- Il campo in cui è immersa la particella $A_\mu(t, \vec{x})$

Riscriviamo la (2) notando che

$$\dot{X}^0 \equiv \frac{\partial X^0}{\partial X^0} = 1$$

e definendo l'indice latino per le componenti spaziali $p = 1, 2, 3$

$$L_{part} = -m\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2} + eA_0 + e\dot{X}^p A_p$$

Ora $\mathcal{A}_{part}$ è resa stazionaria se valgono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{part}}{\partial \dot{X}^i} = \frac{\partial L_{part}}{\partial X^i}$$

Il calcolo fornisce

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{X}^i}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2}} + eA_i \right) = e\frac{\partial A_0}{\partial X^i} + e\dot{X}^p \frac{\partial A_p}{\partial X^i} \equiv e\,\partial_i A_0 + e\,\dot{X}^p \partial_i A_p$$

Prestiamo attenzione al calcolo di:

$$\frac{d}{dt}(e\,A_i(t, \vec{x}))$$

il campo $A_i(t,\vec{x})$ potrebbe o non potrebbe essere esplicitamente funzione del tempo. Se lo fosse, avremmo un termine $\dfrac{\partial A_i}{\partial t}$ a cui andrebbe sommato il termine implicito, siccome $\vec{x}$ in generale dipenderà da t,

$$\frac{\partial A_i}{\partial X^p}\frac{\partial X^p}{\partial t} = \dot{X}^p \partial_p A_i$$

Portando questi termini a secondo membro riconosciamo l'equazione del moto relativistica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{X}^i}{\sqrt{1-|\dot{\vec{x}}|^2}}\right) = e\left(\partial_i A_0 - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + e\dot{X}^p(\partial_i A_p - \partial_p A_i) \tag{3}$$

Siccome la (3) vale per ogni componente i della quantità di moto $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ e l'indice i è libero nei termini a secondo membro, notiamo che l'equazione vettoriale recita[5]

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\,\vec{C}_1 + e\,\vec{v}\times\vec{C}_2$$

dove

$$\vec{C}_1 \equiv -\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{C}_2 \equiv \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

sono due particolari campi vettoriali molto interessanti, perché la loro forma ci suggerisce di calcolare $\vec{\nabla}\cdot C_2$ e $\vec{\nabla}\times\vec{C}_1$. Infatti essendo la divergenza di un rotore sempre nulla otteniamo

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{C}_2 = 0$$

ed essendo il rotore di un gradiente sempre nullo otteniamo

$$-\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}A^0) - \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial\vec{\nabla}\times\vec{A}}{\partial t}$$

Dunque, qualunque essi siano, i campi da noi definiti devono rispettare le due equazioni

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{C}_2 = 0 \\ \\ \vec{\nabla}\times\vec{C}_1 = -\dfrac{\partial\vec{C}_2}{\partial t} \end{cases} \tag{4}$$

Se in natura esiste una teoria relativistica di campo, la forma stessa dei campi da noi definiti ci fornisce gratuitamente due relazioni ricche di informazioni: il campo $\vec{C}_2$ non può avere sorgenti di monopolo e una sua variazione temporale è sempre uguale al rotore di $\vec{C}_1$. Naturalmente noi sappiamo già identificare $\vec{C}_1 = \vec{E}$ e $\vec{C}_2 = \vec{B}$ e sappiamo che le (4) sono due delle quattro equazioni di Maxwell. Come si ottengono le altre due? Finora ci siamo preoccupati di descrivere in che modo la dinamica della particella è determinata dal campo in cui è immersa. Per completare l'opera, dobbiamo descrivere in che modo la particella stessa influenzi il campo: serve una definizione delle sorgenti.
Prima di fare ciò, in virtù del principio di relatività vorremmo scrivere la (3) in forma covariante. Possiamo riconoscere il termine spaziale di quadrivelocità

$$\frac{\dot{X}^i}{\sqrt{1-|\dot{\vec{x}}|^2}} = \frac{dX^i}{d\tau}$$

[5] Le definizioni di $\vec{C}_1$ e $\vec{C}_2$ sono date a meno di un segno irrilevante. Infatti per ottenere il segno corretto nella forza di Lorentz è necessario partire da un termine lagrangiano $-e\dot{X}^\mu A_\mu$, mentre noi siamo partiti con il segno + perché a priori non avevamo motivo di supporre il contrario. Si noti che tutto può essere rinormalizzato da una scelta della costante di accoppiamento "e", la quale è semplicemente la carica elettrica.

tuttavia la sua derivata temporale

$$\frac{d}{dt}\frac{dX^i}{d\tau}$$

non trasforma come un quadrivettore, proprio a causa del fatto che $i = 1, 2, 3$ ovvero manca la componente temporale. Per rimediare moltiplichiamo la (3) per $\dfrac{dt}{d\tau}$

$$\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{X}^i}{\sqrt{1-|\dot{\vec{x}}|^2}}\right) = m\frac{d^2X^i}{d\tau^2} = e\frac{dt}{d\tau}\left(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i\right) + e\frac{dt}{d\tau}\frac{dX^p}{dt}(\partial_i A_p - \partial_p A_i)$$

Ora basta ricordare che

$$\frac{dt}{d\tau} \equiv \frac{dX^0}{d\tau}$$

e possiamo condensare il secondo membro a una somma sull'indice $\nu = 0, 1, 2, 3$ se sostituiamo $\mu = 0, 1, 2, 3$ a i

$$= e\frac{dX^\nu}{d\tau}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

Questa sostituzione semplifica l'espressione a secondo membro, ma ora a primo membro abbiamo (essendo $\dot{X}^i = -\dot{X}_i$) se i è l'indice spaziale

$$m\frac{d^2X^i}{d\tau^2} = -m\frac{d^2X_i}{d\tau^2} = e\frac{dX^\nu}{d\tau}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

per avere covarianza è necessario introdurre l'indice μ anche a primo membro, al posto di i.

$$m\frac{d^2X_\mu}{d\tau^2} \equiv \frac{dP_\mu}{d\tau} = e\frac{dX^\nu}{d\tau}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \equiv eF_{\mu\nu}U^\nu \tag{5}$$

dove $P_\mu = mU_\mu = (\varepsilon, -\vec{p})$ è il quadrimpulso della particella, ε la sua energia. È interessante notare come la necessità di covarianza abbia imposto l'esistenza dell'equazione aggiuntiva

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = e\frac{dX^\nu}{d\tau}(\partial_0 A_\nu - \partial_\nu A_0) \equiv -e\frac{dX^\nu}{d\tau}(\vec{C}_1)_\nu = -e\vec{U}\cdot\vec{C}_1 = -e\vec{U}\cdot\vec{E}$$

dove $\vec{U}$ è la parte spaziale della quadrivelocità.[6]

La (5) è l'espressione per la forza di Lorentz in forma covariante, ed è stata ottenuta puramente dal principio di relatività. Emerge in maniera naturale il tensore antisimmetrico di rango due

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

che come noto è relazionato ai campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$\begin{cases} F_{0i} = -E_i \\[2ex] F_{ij} = -\epsilon_{ijk}B_k \end{cases}$$

Trasformazioni di gauge

Facciamo un passo indietro e consideriamo il termine di interazione dell'azione

$$\mathcal{A}^{int}_{part} = e\int dX^\mu A_\mu$$

[6] Come facciamo a essere sicuri che anche l'equazione per $\mu = 0$ sia vera? Semplicemente notando che siamo partiti da un'azione invariante, da cui discendono leggi covarianti nelle componenti spaziali. Se due quadrivettori hanno componenti spaziali uguali in un SRI, e se trasformano allo stesso modo per cambio di SRI, allora le componenti temporali sono automaticamente covarianti anch'esse.

analizziamo che succede se effettuiamo la seguente trasformazione

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{\partial S}{\partial X^\mu} \tag{6}$$

dove S è un campo scalare qualunque. Sostituendo nell'azione

$$\mathcal{A}^{int}_{part} = e \int dX^\mu \left(A_\mu + \frac{\partial S}{\partial X^\mu} \right) = \mathcal{A}^{int}_{part} + \int dS = \mathcal{A}^{int}_{part} + S(\vec{x}(b)) - S(\vec{x}(a))$$

dove $\vec{x}(b)$ e $\vec{x}(a)$ sono i punti estremali della traiettoria. Siccome quando rendiamo stazionaria l'azione manteniamo fissi i punti estremali, il termine $S(\vec{x}(b)) - S(\vec{x}(a))$ non partecipa alla dinamica della particella. La (6) è quindi detta trasformazione di gauge, e abbiamo ricavato che l'azione così definita è invariante sotto questa trasformazione. Notiamo che se al posto di $dX^\mu A_\mu$ avessimo costruito l'invariante $A^\mu A_\mu$ avremmo perso l'invarianza sotto la (6) e ciò avrebbe comportato che il nostro campo dovesse essere univocamente definito fissando il campo scalare aggiuntivo S, il che ha ben poco di invariante se consideriamo che la forma di $\partial_\mu S$ dipenderebbe dal particolare SRI. D'altra parte, una simmetria di gauge garantisce una certa ridondanza nelle possibili descrizioni dello stesso fenomeno, poiché testimonia l'equivalenza di tante descrizioni dello stesso campo che differiscono al massimo per un gradiente. Inoltre le simmetrie di gauge ci permettono talvolta di semplificare la matematica di una certa descrizione senza modificare la fisica del problema, il che si rifà al principio di semplicità di cui parlavamo all'inizio.

Azione per il campo

La naturale generalizzazione del principio di azione per le particelle al caso di un campo $\phi(t, x)$ è data da[7]

$$\mathcal{A}_{field} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

dove $\mathcal{L}$ è una densità di lagrangiana che dipende da funzioni di ϕ e dalle sue derivate rispetto alle coordinate. Nel caso di un singolo campo le equazioni di Eulero-Lagrange sono quindi

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} \right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

Se invece abbiamo più campi indipendenti[8] $\phi_\nu(t, x)$

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\nu,\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\nu} \tag{7}$$

[7]Il fatto che stiamo supponendo che $\mathcal{L}$ dipenda solo dal campo e dalle sue derivate prime deriva sempre dalla relatività: per avere teorie di campo locali (i campi hanno effetto immediato solo nelle vicinanze, essendo c la massima velocità a cui si può trasmettere l'informazione) è sufficiente richiedere che $\mathcal{L}$ dipenda al massimo da $\partial_\nu \phi$. Per vedere questo fatto si pensi al caso di una particella in meccanica classica. Si ha $L = L(q, \dot{q})$ e mai $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$ poiché il secondo caso genererebbe, nelle equazioni del moto, termini del tipo $\dddot{q}$ al costo di una condizione iniziale in più e spesso al costo della causalità stessa, e preservare quest'ultima è importantissimo in fisica.

[8]Introduciamo la notazione

$$\phi_{\nu,\mu} \equiv \frac{\partial \phi_\nu}{\partial X^\mu}$$

la quale indica che stiamo derivando la componente ν di un campo quadrivettoriale rispetto alla coordinata X^μ.

Campo senza sorgenti

Studiamo la lagrangiana di campo in assenza di sorgenti, e quindi cerchiamo degli invarianti con ciò che abbiamo a disposizione. Per via della discussione sulle trasformazioni di gauge eviteremo di utilizzare l'invariante $A_\mu A^\mu$. L'altra opzione è quella di sfruttare il tensore $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Questi è un ottimo candidato poiché assicura anche l'invarianza di gauge per trasformazioni $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu S$. Infatti sostituendo si ha

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu S) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu S) = F_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu S - \partial_\nu\partial_\mu S$$

per ciò che interessa a noi, il campo S è tale da soddisfare $\partial_\mu\partial_\nu S = \partial_\nu\partial_\mu S$. Dunque $F_{\mu\nu}$ è invariante per trasformazioni di gauge.
Il modo più semplice di ottenere uno scalare da un tensore è quello di considerarne la traccia alzando o abbassando un indice. Tuttavia otteniamo

$$F^\mu_\mu = 0$$

essendo $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ come segue dalla definizione. Per ottenere un altro invariante da $F_{\mu\nu}$ possiamo invece considerarne la contrazione $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ che è una combinazione quadratica non banale. Ad esempio se consideriamo i indice spaziale

$$F^{0i}F_{0i} = (-E_i)(E_i) = -E_i^2$$

ed esistendo anche il termine $F^{i0}F_{i0} = -E_i^2$ abbiamo in totale

$$F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} = -2E_i^2$$

Allo stesso modo se i, j sono indici spaziali $F^{ij}F_{ij} = F^{ji}F_{ji} = B_k^2$. Alla fine

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2|\vec{E}|^2 + 2|\vec{B}|^2 = -2(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)$$

Tale quantità invariante può costituire la nostra lagrangiana di campo[9]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

In tale lagrangiana sono contenuti 4 campi indipendenti, che sono le 4 componenti del quadrivettore A_μ. Utilizzando la notazione adottata sopra

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})(A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu})$$

Calcoliamo l'equazione di Eulero-Lagrange per la componente x. Quando effettuiamo la derivata parziale rispetto a $A_{x,y}$ gli unici termini non nulli sono:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,y}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial A_{x,y}}(A_{x,y} - A_{y,x})(A^{x,y} - A^{y,x})$$

dove il fattore $1/2$ è dovuto al fatto che l'espressione compare sia per $\mu = x$ e $\nu = y$ che per $\mu = y$ e $\nu = x$. Poiché x è una componente spaziale abbiamo

$$-\frac{1}{2}(A_{x,y} - A_{x,y})(A^{x,y} - A^{x,y}) = -\frac{1}{2}(A_{x,y} - A_{y,x})(-A_{x,y} + A_{y,x}) = \frac{1}{2}(A_{x,y} - A_{y,x})^2$$

dunque

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial A_{x,y}}\frac{1}{2}(A_{x,y} - A_{y,x})^2 = \frac{\partial}{\partial y}(A_{x,y} - A_{y,x}) \equiv \frac{\partial}{\partial y}F_{yx}$$

Uno può eseguire i calcoli per tutte le componenti e trovare che in generale il lato sinistro dell'equazione di Eulero-Lagrange fornisce il termine $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ e poiché $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente da A_ν troviamo l'equazione in assenza di sorgenti

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

[9] Il fattore $1/4$ è un capriccio per ricondursi a espressioni del tipo $\frac{1}{2}(\dot{\vec{A}})^2$ sotto certi gauge, in analogia con il caso dell'energia cinetica di una particella.

Campo con sorgenti

Quando si parla di sorgenti di campi si usa parlare di una distribuzione densità[10] $\rho(\vec{x})$ che in una generica lagrangiana di campo $\phi(t,\vec{x})$ figura come

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - g\rho(\vec{x})\phi(t,\vec{x})$$

con g costante di accoppiamento. Potremmo quindi pensare di scrivere il termine di sorgente come $\rho(\vec{x})A_\mu$ tuttavia dobbiamo assicurarci che sia un invariante di Lorentz. Notiamo però che $\rho(\vec{x})$ non è invariante perché della forma

$$\rho(\vec{x}) = \frac{\text{quantità di sorgente}}{dxdydz}$$

e l'elemento di volume trasforma in un modo che non ci assicura nulla sull'invarianza del prodotto $\rho(\vec{x})A_\mu$. La radice del problema è che quando il sistema sorgente+campo è visto in movimento, la densità di sorgente si trasforma in una corrente di sorgente, e diventa sensibile alla direzione del movimento. Quindi dobbiamo dare attributi vettoriali al termine di sorgente ed effettuare il cambiamento $\rho \to (\rho, \vec{j}) \equiv J^\mu$ dove $\vec{j}$ è il vettore densità di corrente. A questo punto possiamo formare l'invariante richiesto accoppiando i due quadrivettori e sommando sull'indice: $J^\mu A_\mu$. La lagrangiana completa diventa[11]

$$\mathcal{L}_{field} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \tag{8}$$

Ora possiamo calcolare

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = J^\nu$$

per cui, usando il conto di prima, otteniamo le seguenti equazioni al variare di ν

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{9}$$

che con le seguenti definizioni

$$\begin{cases} F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu \\ \\ E_i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i \\ \\ B_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k \end{cases}$$

completano il quadro sulle equazioni di Maxwell.
Per $\nu = 0$ abbiamo

$$\partial_i F^{i0} = \partial_i E_i = J^0 = \rho$$

ovvero

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \tag{10}$$

Per $\nu = j$

$$\partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} = J^j \Longrightarrow -\partial_t E_j + \epsilon_{jik}\partial_i B_k = J^j$$

e quindi

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{11}$$

A differenza delle (4), che derivavano gratuitamente dalla definizione di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ rispetto al campo A_μ, la (10) e la (11) le abbiamo tirate fuori chiedendoci quale fosse la forma invariante della lagrangiana di campo.

[10]Per una particella singola si può pensare la sorgente come: $\rho(\vec{x}) = e\delta(\vec{x})$
[11]Trascuriamo le costanti moltiplicative: in CGS $4\pi/c$, in MKS μ_0

Gauge per il campo

Abbiamo già verificato che il termine $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ è invariante per trasformazioni di gauge. Questo fatto, nel caso senza sorgenti, ci assicura che l'azione è invariante per gauge. Se introduciamo il termine $J^\mu A_\mu$ possiamo sottoporlo alla stessa verifica. Il termine di azione si scrive

$$\mathcal{A}_J = \int dt \int d^3\vec{x} J^\mu A_\mu$$

Effettuiamo la trasformazione $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu S$ e sostituiamo. Evidentemente

$$\mathcal{A}_J \to \mathcal{A}_J + \int dt \int d^3\vec{x} J^\mu \partial_\mu S$$

Integriamo per parti l'ultimo termine

$$\int d^3\vec{x} J^\mu \partial_\mu S = J^\mu S \Big|_{\vec{x} \in \partial R} - \int d^3\vec{x}\, \partial_\mu J^\mu S$$

dove ∂R è il bordo della nostra regione di integrazione: se supponiamo che tale regione si estenda all'infinito e se supponiamo che J^μ e S decadano all'infinito, il primo termine si annulla e rimaniamo con

$$\int d^3\vec{x}\, \partial_\mu J^\mu S$$

Ora, se uno sapesse già che parliamo della teoria elettromagnetica di Maxwell, identificherebbe subito l'equazione di continuità della quadricorrente $\partial_\mu J^\mu = 0$ per cui anche il secondo termine svanirebbe e avremmo l'invarianza di gauge. È interessante osservare però che siccome siamo partiti senza fare ipotesi sul tipo di sorgente, potremmo voler calcolare $\partial_\mu J^\mu$ in altro modo. Abbiamo già ricavato, con il principio di azione stazionaria, che $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$. Supponiamo di calcolare $\partial_\nu J^\nu$. Avremo

$$\partial_\nu J^\nu = \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

ma siccome $F^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$ otteniamo subito

$$\partial_\nu J^\nu = 0$$

Dunque l'invarianza di gauge è rispettata senza nessuna ipotesi sul tipo di sorgente: la proprietà discende dalle equazioni di campo ottenute con Eulero-Lagrange.[12]

Conclusioni

Immaginiamo per un momento che il postulato sulla costanza della velocità della luce per SRI non sia dovuto ad argomenti di elettromagnetismo. Immaginiamo cioè che una civiltà abbia scoperto dapprima, per altre vie, che la luce ha una sola velocità per tutti i SRI, senza conoscere nulla sull'elettromagnetismo[13]. Tuttavia supponiamo che questa civiltà sia familiare con il concetto di campo (e non è difficile soddisfare questa supposizione, siccome la gravità è un fenomeno universale ed è l'esempio più evidente di campo). Se il buon senso di costoro li portasse a derivare un principio di relatività e quindi una nozione di

[12] Questo in realtà non è fortuito, ma deriva dal secondo teorema di Noether[2]: se l'azione è invariante sotto un gruppo (di dimensione infinita) di trasformazioni continue che dipendono da k funzioni indipendenti (e dalle loro derivate, come nel caso del gradiente $\partial_\nu S$), allora è possibile derivare un'equazione di continuità per la sorgente del campo indipendentemente dalle equazioni di campo stesse.

[13] Questa assunzione è plausibile. Infatti per condurre un esperimento di Michelson-Morley e trarne delle conseguenze su c è necessario solo sapere che la luce ha proprietà ondulatorie (fatto verificabile con esperimenti di Young). Per cui è possibile che una civiltà possa scoprire prima il postulato su c anche senza aver derivato le equazioni di Maxwell.

spaziotempo, allora sarebbero in grado di derivare, con la più semplice teoria classica di campo quadrivettoriale, che deve esistere un campo con le stesse caratteristiche di quello che noi chiamiamo "elettromagnetico". Volendo speculare, potremmo affermare che il principio di relatività, unito al concetto di campo classico, ci fa capire come l'esistenza stessa dell'elettromagnetismo sia una necessità del nostro universo.

Riferimenti bibliografici

[1] V. Barone "*Relatività: princìpi e applicazioni*"
Bollati Boringhieri, (2004).

[2] K. Brading, H.R.Brown "*Noether's Theorems and Gauge Symmetries*"
`http://arxiv.org/abs/hep-th/0009058v1`