Perché la gravità è una forza fittizia in relatività generale?

Matteo Parriciatu

1 Introduzione

Molte idee chiave della relatività generale sono nascoste nel formalismo di Minkowski della relatività ristretta. Partendo da ciò, possiamo percorrere la strada concettuale che condusse Einstein al più grande cambio di prospettiva dopo Newton:

- *La gravità è una forza fittizia perché è eliminabile con un cambio di coordinate: un corpo in caduta libera non è accelerato, segue solo la traiettoria percorsa dai corpi liberi in uno spaziotempo curvo.*

Partiremo dallo studio delle forze fittizie in relatività speciale, e sfrutteremo il principio di equivalenza per cogliere le analogie tra le forze inerziali e la gravità[4].

2 Le forze fittizie in relatività speciale

Supponiamo che esista un sistema inerziale in modo che tramite le sue coordinate (t, x, y, z) la metrica di Minkowski sia

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

Supponiamo ora di descrivere il moto di una particella libera tramite queste coordinate. È noto che la traiettoria è ricavabile estremizzando l'azione relativistica

$$S = -m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \tag{2}$$

Questa espressione è manifestamente indipendente dalla parametrizzazione della traiettoria (in quanto non compare). Tra tutte le parametrizzazioni scegliamo quella più naturale: il tempo proprio. Consideriamo il sistema in quiete con la particella, in tale sistema $d\vec{x} = 0$ per definizione, dunque $ds^2 = -d\tau^2$ e cioè

$$1 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)^2 \tag{3}$$

Per cui l'azione può essere scritta nella forma usuale in meccanica classica[1]

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} \equiv -m \int d\tau \mathcal{L}(x^\mu, u^\mu) \tag{4}$$

[1] $\frac{dx^\mu}{d\tau} = u^\mu$ è la quadrivelocità

e il funzionale è estremizzato dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\mu}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}$$

Siccome la metrica $\eta_{\mu\nu}$ non dipende dalle coordinate, si ha

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{-\eta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial u^\mu}(u^\mu u^\nu)}{2\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\eta_{\sigma\mu}u^\mu}{\frac{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}}{d\tau}}\right) = 0$$

ovvero

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \tag{5}$$

Per definizione un sistema è inerziale se le traiettorie delle particelle libere soddisfano la (5). La cosa interessante è studiare come questa condizione si trasforma sotto cambi di coordinate. Se consideriamo i boost di Lorentz è chiaro che la (5) è invariante in forma, ma è ancora più interessante rimarcare che queste trasformazioni lasciano invariata la metrica (1) per definizione. Abbiamo quindi una prima intuizione del fatto che se vogliamo passare ai sistemi non inerziali bisogna chiedere di cambiare la forma della metrica. Questi sistemi ci interessano perché dalla meccanica classica ci aspettiamo che sorgano delle forze inerziali, che vogliamo analizzare in dettaglio nel formalismo di Minkowski. Un sistema non inerziale interessante è quello rotante, consideriamo quindi una rotazione nel piano x-y attorno all'asse z descritta dal cambio di coordinate[1]

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x'\cos(\omega t') - y'\sin(\omega t') \\ y = x'\sin(\omega t') + y'\cos(\omega t') \\ z = z' \end{cases} \tag{6}$$

La metrica è trasformata in

$$ds^2 = -[1-\omega^2(x'^2+y'^2)]dt'^2 + 2\omega(x'dy' - y'dx')dt' + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \tag{7}$$

da cui riconosciamo il termine centrifugo nella parte temporale ω^2 e il termine di Coriolis nella parte mista $2\omega(x'dy' - y'dx')dt'$. Per calcolare la traiettoria della particella libera in queste coordinate possiamo trasformare la (5) tramite la chain rule. Il conto generale è il seguente per una trasformazione $y^\rho \to y^\rho(x)$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d}{d\tau}y^\rho\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}y^\rho\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\right)\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma} + \left(\frac{dx^\sigma}{d\tau}\right)\frac{d}{d\tau}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma}$$

$$= \frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}\frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\sigma\partial x^\gamma} = 0$$

se vogliamo isolare il termine di accelerazione dalla somma sull'indice σ, moltiplichiamo tutto per $\dfrac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho}$ e otteniamo

$$\delta^\mu_\sigma\frac{d^2x^\sigma}{d\tau^2} + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho}\frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\sigma\partial x^\gamma}\right)\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

Notiamo che la quantità tra parentesi è un oggetto a tre indici di cui uno alto, ed è simmetrico negli indici bassi, e in genere è indicato con $\Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma}$. In definitiva la (5) è stata trasformata in

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \tag{8}$$

Scrivendo esplicitamente abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{d^2t'}{d\tau^2} = 0 \\ \\ \dfrac{d^2x'}{d\tau^2} = \omega^2 x' \left(\dfrac{dt'}{d\tau}\right)^2 + 2\omega\dfrac{dy'}{d\tau}\dfrac{dt'}{d\tau} \\ \\ \dfrac{d^2y'}{d\tau^2} = \omega^2 y' \left(\dfrac{dt'}{d\tau}\right)^2 - 2\omega\dfrac{dx'}{d\tau}\dfrac{dt'}{d\tau} \\ \\ \dfrac{d^2z'}{d\tau^2} = 0 \end{cases}$$

La prima cosa su cui dobbiamo soffermarci è che siccome siamo partiti dalla (5), la (8) descrive il moto di una particella libera. Infatti nel limite non relativistico $v \ll 1$ queste equazioni si riducono a quelle del moto in un sistema rotante con la seguente forma

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_I = m\vec{a}''$$

dove $\vec{a}''$ è l'accelerazione misurata nel sistema rotante, $\vec{F}_I$ i contributi di Coriolis e di forza centrifuga, e $\vec{F}_{ext}$ è la forza esterna percepita nel sistema inerziale. Se la particella era libera ($F_{ext} = 0$) allora si riduce tutto a

$$\vec{a}'' - \frac{\vec{F}_I}{m} = 0$$

e la cosa importante è che per costruzione le forze di inerzia sono proporzionali alla massa, poiché derivano dalla trasformazione delle coordinate. In questo modo abbiamo esattamente la forma non-relativistica della (8)

$$\vec{a}'' + \vec{\alpha}_I = 0$$

L'osservatore rotante può quindi attribuire il moto accelerato della particella a delle forze che tuttavia sono fittizie, oppure può decidere di tenere conto di queste forze e interpretare lo "0" a secondo membro come il fatto che la particella sia libera.

3 La connessione

La seconda lezione che possiamo trarre dalla (8) è che può discendere da un principio di azione[2], e ciò è reso evidente dalla presenza dell'oggetto $\Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma}$ detto *connessione*, o simbolo di Christoffel. Per vedere in che senso, notiamo che facendo il cambio di coordinate la metrica si è trasformata come

$$\eta_{\rho\sigma}dy^\rho dy^\sigma = \eta_{\rho\sigma}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu}dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

e quindi

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu} \tag{9}$$

Facendo la derivata $\partial_\gamma \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\gamma}$

$$\partial_\gamma g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\rho\sigma} \left(\frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\gamma x^\mu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\gamma x^\nu} \right)$$

Dalla definizione di simbolo di Christoffel

$$\Gamma^\mu_{\sigma\gamma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho} \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\sigma \partial x^\gamma} \Longrightarrow \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\sigma \partial x^\gamma} \delta^\mu_\alpha = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}$$

ovvero

$$\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} = \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\sigma \partial x^\gamma}$$

usando la definizione della (9) possiamo quindi scrivere

$$\partial_\gamma g_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\gamma\nu} \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\mu} = \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} g_{\alpha\nu} + \Gamma^\alpha_{\gamma\nu} g_{\alpha\mu}$$

scriviamo la stessa espressione permutando ciclicamente $\partial_\mu g_{\gamma\nu}$, $\partial_\nu g_{\mu\gamma}$ e sommiamo questi due sottraendovi $\partial_\gamma g_{\mu\nu}$ per ottenere, per via della simmetria di scambio $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}$

$$\partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu} = 2\Gamma^\alpha_{\mu\nu} g_{\alpha\gamma}$$

Per invertire l'espressione moltiplichiamo per $g^{\rho\gamma}$ in modo da bloccare la somma su α a secondo membro

$$2\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \delta^\rho_\alpha = g^{\rho\gamma} [\partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}]$$

e quindi

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\gamma}(x) [\partial_\mu g_{\nu\gamma}(x) + \partial_\nu g_{\mu\gamma}(x) - \partial_\gamma g_{\mu\nu}(x)] \tag{10}$$

Sostituendo questa espressione nella (8)

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(x) [\partial_\mu g_{\nu\sigma}(x) + \partial_\nu g_{\mu\sigma}(x) - \partial_\sigma g_{\mu\nu}(x)] \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{11}$$

possiamo fattorizzare $g^{\rho\sigma}$ e scrivere[2]

$$g^{\rho\sigma} \left[\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} g_{\mu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] = 0$$

concentrandoci sul secondo fattore e notando che il seguente termine è scrivibile come una chain rule

$$\partial_\nu g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(g_{\mu\sigma}(x)) \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Otteniamo infine

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

[2]Gli indici μ, ν sono muti nel prodotto $(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma}) u^\mu u^\nu$

la quale ha esattamente la forma di un'equazione di Eulero-Lagrange per una lagrangiana della stessa forma di (4) parametrizzata con il tempo proprio. La (8) estremizza quindi l'azione generalizzata

$$S = -m \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} \tag{12}$$

Dal punto di vista della relatività speciale, l'azione di una particella libera poteva essere scritta nella forma (2) per via di due argomenti fondamentali:

- La quantità $m \int ds = m \int d\tau$ è l'invariante più semplice da costruire nello spazio di Minkowski
- Tale quantità assumeva la forma classica nel limite non relativistico $v \ll 1$

$$S = -m \int d\tau = -m \int \frac{dt}{\gamma} = -m \int \sqrt{(dt)^2 - (d\vec{x})^2} \approx -m \int dt \left(1 - \frac{v^2}{2} + ...\right)$$

Grazie a questo esempio ci si può accorgere invece che la struttura geometrica della relatività speciale è ben più lungimirante, in quanto $\int ds$ può essere interpretata come lunghezza nello spaziotempo. In questo senso estremizzare la (12) può significare la seguente questione: "quale geodetica nello spaziotempo estremizza l'azione di una particella libera?". Per i sistemi inerziali connessi da un cambio di coordinate lineare di Lorentz, le rette vengono mandate in rette. Nelle trasformazioni non lineari invece le rette vengono mandate non in traiettorie qualunque, ma in geodetiche dello spaziotempo. Questo esempio ci dà un indizio su come "interagiscano" le forze inerziali con un corpo di massa m.

4 Alcune precisazioni

È necessario precisare due questioni, che in un certo senso sono interconnesse.

1. La forma della (8) può far pensare che qualsiasi trasformazione non lineare delle coordinate possa introdurre delle forze fittizie, cioè che qualsiasi insieme di coordinate curvilinee possa costituire un sistema non inerziale. Infatti il simbolo di Christoffel

   $$\Gamma^\mu_{\sigma\gamma} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho} \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\sigma \partial x^\gamma} \tag{13}$$

   è non nullo solo se il cambio di coordinate prevede almeno una relazione non lineare. Tuttavia un controesempio molto semplice è il seguente.
   Consideriamo la trasformazione sul piano $(x, y) \to (r, \theta)$

   $$\begin{cases} t = t' \\ x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z' \end{cases}$$

   La metrica è trasformata in

   $$ds^2 = -dt'^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz'^2 \tag{14}$$

E dalla (8) le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dt'}{d\tau}\right) = 0 \\ \\ \frac{d^2r}{d\tau^2} = r\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 \\ \\ \frac{d}{d\tau}\left(r^2\frac{d\theta}{d\tau}\right) = 0 \\ \\ \frac{d^2z'}{d\tau^2} = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Per un moto rettilineo uniforme nel sistema inerziale $\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{d^2z}{d\tau^2} = 0$ e sul piano $x - y$ corrisponde a $y = \tan\theta x$ con $\theta = \bar{\theta} =$ costante. Questa condizione è soluzione delle (15), quindi il moto rimane rettilineo uniforme anche in coordinate curvilinee [3]. In realtà la differenza sostanziale tra i due esempi (sistema rotante e coordinate cilindriche) sta nel fatto che nel primo caso abbiamo effettuato un cambiamento di sistema di riferimento, mentre nel secondo caso un semplice cambio di coordinate[3]. Lo “stato di moto” dell’osservatore è stato variato solo nel primo caso, per cui è solo in tale contesto che ci aspettiamo le forze inerziali.

2. Nonostante sia nella (7) che in (14) la metrica è stata trasformata da $\eta_{\mu\nu}$ a $g_{\mu\nu}(x)$ che dipende dalle coordinate, lo spaziotempo è rimasto “piatto” nel senso riemanniano. Ciò è evidente dal fatto che in entrambi i casi siamo partiti da Minkowski, e in tale varietà $R_{\mu\nu\gamma\sigma} = 0$ il tensore di curvatura è nullo, e per la sua natura tensoriale, rimane nullo sotto qualsiasi trasformazione di coordinate. D’altra parte la natura delle forze inerziali è racchiusa nel simbolo di Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma}$ in quanto non trasforma come un tensore: se è nullo in un sistema di coordinate, può non essere nullo se trasformato.

A questo punto siamo pronti per affrontare la questione della forza inerziale più famosa di tutte: la forza gravitazionale.

5 Il principio di equivalenza

Forma debole: *La massa inerziale, cioè la proprietà intrinseca di un corpo di opporsi alle variazioni dello stato di moto, e la massa gravitazionale, cioè la costante di accoppiamento di ogni corpo con la forza gravitazionale, sono numericamente uguali, $m_I = m_G$.*

Forma forte: *In ogni punto dello spaziotempo in cui esiste un campo gravitazioanle è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento localmente inerziale in cui i corpi si muovono di moto rettilineo uniforme.*

[3] La distinzione tra questi due concetti è sottile, e lo stesso Einstein usò spesso interscambiarli. Questo condusse ad alcune ambiguità che furono risolte più tardi. In generale cambiare lo stato di moto di un osservatore è un’operazione ben distinta dal cambiare sistema di coordinate. Se questa distinzione è naturale in meccanica classica, in relatività generale diventa una complicazione perché se si vuole tenere conto del moto dell’osservatore vanno introdotte le tetradi, e quindi le coordinate di Fermi, che si riducono alle coordinate normali di Riemann per sistemi localmente inerziali. Vedi [4].

La differenza tra queste due forme dell'enunciato è di natura epistomologica: la forma debole è stata verificata sperimentalmente con grande precisione, mentre la forma forte ha lo stesso grado di un postulato. Infatti ad oggi si ha che forte⇒debole, ma non è vero il contrario.
Immaginiamo un'astronave di piccole dimensioni che si trovi nello spazio vuoto, supponiamo cioè di far scomparire per un istante tutta la materia dall'universo eccetto la nostra astronave e i suoi passeggeri. Se l'astronave ha i motori spenti, è facile immaginare che ogni cosa al suo interno fluttui liberamente. Quindi se si conducesse un esperimento in cui si misura il moto di una pallina a cui è stato dato un impulso iniziale, si troverebbe che questa si muove di moto rettilineo uniforme: l'astronave è l'archetipo di sistema inerziale. Se ora immaginiamo di far comparire improvvisamente un pianeta di massa $M_\oplus$ a una distanza r, l'astronave e tutti i corpi al suo interno verrebbero attratti, secondo Newton, con un'accelerazione in modulo

$$m_I a = G\frac{m_G M_\oplus}{r^2} \quad \Rightarrow \quad a = G\frac{M_\oplus}{r^2}$$

dove abbiamo usato il principio di equivalenza debole $m_I = m_G$ e abbiamo supposto di trattare l'astronave e i suoi occupanti come un singolo punto, nell'ipotesi che la regione di interazione sia molto più grande delle dimensioni caratteristiche dell'astronave[4]. Sotto tali condizioni, si giunge a un risultato concettualmente sensazionale: poiché l'astronave accelera tanto quanto ogni suo abitante e ogni corpo all'interno ha la stessa accelerazione, ogni accelerazione relativa è nulla. Ciò significa che l'esperimento sulla pallina darebbe lo stesso risultato di prima: si muoverebbe di moto rettilineo uniforme; e se non ci fossero finestrini, gli abitanti non avrebbero modo di percepire la presenza del pianeta. Vale la pena enfatizzare che questo risultato è unico fra tutti i tipi di interazioni fondamentali [5].

6 Gravità e geometria

Il fatto che un sistema in caduta libera, (se ci si restringe a una porzione sufficientemente piccola di spazio), possa essere considerato inerziale, ricorda da vicino il funzionamento delle forze inerziali. Nel contesto newtoniano, anche in caduta libera abbiamo una forza proporzionale alla massa, e anche ora un cambio di sistema di riferimento trasforma le rette all'interno dell'astronave in traiettorie curve che sono le tipiche orbite gravitazionali. Tornando all'esempio del sistema rotante, un osservatore solidale ad esso vedrebbe tutti i corpi accelerare allo stesso modo, indipendentemente dalla loro massa, proprio come se fossero sottoposti alla forza gravitazionale[3]. Questa accelerazione può essere cancellata con un cambio di sistema di riferimento. Nel caso dell'astronave in caduta libera la situazione è analoga in quanto è possibile trasformare tra due sistemi di coordinate con lo stesso meccanismo

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\gamma}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d^2y^\rho}{d\tau^2} = 0$$

Queste due equazioni, nel contesto del nostro ragionamento, descrivono la stessa situazione: una particella in caduta libera che è esente da forze esterne, e che in uno dei due sistemi è soggetta a

[4]Ci stiamo cioè mettendo nelle condizioni in cui possa valere il postulato in forma forte.

[5]Ad esempio nell'elettromagnetismo la costante di interazione è la carica elettrica Q, che varia di corpo in corpo in base alla sua costituzione, per cui se al posto del pianeta mettessimo ad esempio una sorgente di campo elettromagentico, e se l'astronave fosse una superficie carica, questa inizierebbe ad accelerare, diversamente dai suoi abitanti "neutri" che si sentirebbero invece spinti nella direzione di moto.

una forza inerziale innescata dalla struttura metrica dello spaziotempo[2].
Occorre però fare una precisazione. È infatti chiaro che non esistono osservatori "neutri" rispetto all'interazione gravitazionale. Nell'esempio del sistema rotante potevamo individuare il sistema inerziale come quello in cui la traiettoria della particella era una linea retta, e il sistema rotante come quello in cui la traiettoria era una geodetica. In quel caso l'osservatore rotante era in grado di misurare l'accelerazione della particella perché tale accelerazione non coinvolgeva l'osservatore stesso. Nel caso gravitazionale, l'osservatore non può essere esente da accelerazione: non esiste un osservatore neutro rispetto al quale possiamo misurare l'accelerazione di un corpo dovuta alla gravità[5]. Nel contesto di questo ragionamento, ha più senso considerare "non-accelerati" i sistemi in caduta libera. I corpi che seguono le geodetiche sono per definizione "non accelerati" in quanto le geodetiche sono le "linee rette" dell'interazione gravitazionale, le quali soddisfano la condizione per l'estremizzazione della distanza tra due punti A e B, $S = \int_A^B ds$.
Questo è particolarmente importante perché se ammettiamo che dalla (2) si possa derivare la dinamica di una particella libera in un sistema inerziale nel caso dello spazio piatto di Minkowski, la forma della (7) ci fa intuire che la natura dell'interazione tra la forza misurata dal sistema non inerziale e i corpi debba essere nascosta dentro la metrica stessa. Stiamo cioè asserendo che l'interazione gravitazionale possa essere descritta semplicemente con l'azione (12)

$$S = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}$$

Questo passaggio, senza il principio di equivalenza, non è per nulla scontato. Ad esempio l'interazione elettromagnetica in relatività ristretta ha la seguente forma

$$S = -m \int \sqrt{\eta_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} + q \int A_\mu dx^\mu$$

quindi l'interazione gravitazionale sarebbe piuttosto unica, in quanto si può dire che sia nascosta nella struttura metrica $g_{\mu\nu}(x)$.

7 Gravità e geometria: un altro argomento a favore

Come altro argomento a favore della natura geometrica dell'interazione gravitazionale, possiamo studiare il limite classico non-relativistico dell'azione, e adattarlo al caso relativistico in modo che sia covariante.
Nel limite classico si ha

$$S = \int dt L = \int dt(T - V) = \int dt \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 + m\Phi(\vec{x})_g \right]$$

dove $\Phi_g(\vec{x})$ è il potenziale gravitazionale, accoppiato alla particella con la sua massa m. Proprio questo accoppiamento ci permette di riscrivere la relazione come uno sviluppo in v^2/c^2 fattorizzando m.

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 + m\Phi(\vec{x})_g = m \left[\left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 + \Phi(\vec{x})_g \right] \approx -mc^2 \left[\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2}{c^2} - \frac{2\Phi_g(\vec{x})}{c^2}} - 1 \right]$$

trascurando il termine costante che non cambia la dinamica possiamo scrivere l'azione portando il dt dentro la radice. L'azione relativistica è quindi S_{rel}

$$S_{rel} = -mc \int \sqrt{(1 - 2\Phi_g(\vec{x}))c^2 dt^2 - d\vec{x}^2} \equiv -mc \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu}$$

dove $g_{ij}(x) = \eta_{ij}$ e $g_{00}(x) = 1 - 2\Phi_g(x)$. Nel limite di campo debole la gravità è contenuta nella parte temporale della metrica[2]. L'azione ha la stessa forma di quella per una particella libera.

8 Perché lo spaziotempo deve essere curvo?

Tutti questi ragionamenti sono stati fatti a partire dallo spazio piatto di Minkwoski: siamo ancora nell'ambito della relatività ristretta. Tuttavia il principio di equivalenza forte ci fa intuire che non ci può essere convivenza fra teoria gravitazionale e spaziotempo piatto:

1. L'equivalenza vale solo localmente per via del fatto che il campo gravitazionale è in generale non-omogeneo, quindi a differenza della relatività ristretta un osservatore inerziale non può assegnare a tutto lo spazio le 4-coordinate degli eventi in maniera omogenea[5], e siccome gli osservatori inerziali sono solo quelli in caduta libera, abbiamo che lo spaziotempo può essere piatto solo localmente. Questo ricorda da vicino la possibilità di costruire delle coordinate normali di Riemann per ogni punto di una varietà differenziabile, tramite le quali la metrica assume localmente la forma canonica di Minkowski.

2. Il fatto che un sistema inerziale (cioè in caduta libera) non possa comparare le velocità di traiettorie lontane dalla propria località senza che queste siano dipendenti dal cammino (per via ancora della non-omogeneità del campo gravitazionale) somiglia molto alla dipendenza dal cammino per il trasporto parallelo dei vettori nelle varietà curve.

Queste osservazioni sono sufficienti affinché uno consideri che: non solo l'interazione gravitazionale deve essere contenuta nella metrica $g_{\mu\nu}$ nell'azione di particella "libera", ma questa metrica deve contenere informazioni sulla curvatura intrinseca dello spaziotempo.
La curvatura intrinseca è quindi ricavata cercando delle equazioni covarianti che relazionino la metrica $g_{\mu\nu}$ e i termini di curvatura, con gli agenti che determinano la curvatura stessa: ogni forma di energia, tra cui la massa.

Riferimenti bibliografici

[1] M.P. Hobson et al. "*General relativity, an introduction for physicists*" (2006).
Cambridge University Press.

[2] A.Zee "*Einstein gravity in a nutshell*" (2013).
Princeton University Press.

[3] J.Foster "*A short course in general relativity*" (1979)
Longman Mathematical texts.

[4] J. Norton "*General covariance and the foundations of General relativity: eight decades of dispute*". (1993)
Rep. Prog. Phys. 56 (1993) 791-858.

[5] S. Carroll "*Lecture notes on General Relativity*". (2019)
https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019v1