

# Caduta libera in un buco nero di Schwarzschild in coordinate di Fermi

Matteo Parriciatu

30 dicembre 2020

## 1 Verso la singolarità

Mettiamoci nei panni di un astronauta in caduta libera verso un buco nero e chiediamoci che aspetto abbia la regione di spaziotempo che lo circonda durante la discesa. Volendo puntare sulla massima semplicità, possiamo richiedere che il buco nero in questione sia di Schwarzschild, cioè non rotante e statico nel tempo: eterno<sup>1</sup>. In generale la soluzione di Schwarzschild per una distribuzione sferica di energia di una certa dimensione  $R$  è data in coordinate sferiche  $(t, r, \theta, \phi)$  da<sup>2</sup>

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.1)$$

dove definiamo  $2GM \equiv r_S$  raggio di Schwarzschild. Nella descrizione dei comuni oggetti gravitazionali le singolarità  $r = r_S$  e  $r = 0$  di questa metrica non ci preoccupano in quanto questa soluzione è valida solo per  $r > R$  e normalmente  $r_S \ll R$ . Un buco nero è però definito in modo tale che  $r_S > R$  e quindi il punto  $r = r_S$  diventa assai rilevante in quanto nessun oggetto, una volta trovatosi a distanza  $r < r_S$  può più sfuggire all'attrazione gravitazionale, nemmeno la luce<sup>3</sup>. Nonostante ciò, lo spaziotempo non “esplode” attorno a  $r = r_S$  come invece suggerirebbe la (1.1): tale singolarità è eliminabile, com'è noto, con un opportuno cambio di coordinate. Quindi cosa succederebbe a un osservatore in caduta libera verso l'orizzonte degli eventi? Se il buco nero fosse rotante e avesse un disco di accrescimento, l'astronauta morirebbe all'istante. Ma se il buco nero fosse di Schwarzschild ci sarebbe da preoccuparsi solo delle forze mareali, che provocherebbero la spaghetizzazione dell'osservatore anche vicino all'orizzonte. Siccome tali forze vanno come  $1/r^3$  ciò sarebbe letale se fosse  $r_S$  molto piccolo, e cioè per buchi neri di piccola massa. Se invece considerassimo un oggetto supermassiccio allora  $r_S = 2GM$  sarebbe molto grande e quindi se l'astronauta fosse chiuso dentro una

---

<sup>1</sup>Al contrario, tutti i buchi neri a noi noti sono sorti da eventi astrofisici ben definiti nel tempo, e sono dotati di spin.

<sup>2</sup>Usiamo unità di  $c = 1$ .

<sup>3</sup>In gergo  $r = r_S$  è noto come orizzonte degli eventi.

capsula senza finestrini non si accorgerebbe nemmeno di aver oltrepassato l'orizzonte. Quest'ultima affermazione è dovuta al principio di equivalenza: un osservatore in un campo gravitazionale rappresenta un sistema di riferimento localmente inerziale, cioè nelle sue vicinanze lo spaziotempo è, in coordinate cartesiane, descritto dalla metrica di Minkowski  $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ . In generale l'intorno di qualsiasi punto dello spaziotempo può essere descritto da una metrica minkowskiana: in coordinate normali di Riemann[2]  $x^\mu$  il tensore metrico è dato dall'espansione

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2!}(\partial_\lambda \partial_\sigma g_{\mu\nu})x^\lambda x^\sigma + \dots \quad (1.2)$$

dove la metrica di Minkowski è l'ordine zero. L'ordine zero è anche la forma assunta dalla metrica (1.1) in coordinate sferiche per distanze  $r \gg r_S$ , e possiamo quindi interpretarla come approssimazione di campo debole. Tuttavia il principio di equivalenza dice di più: lo spaziotempo è minkowskiano anche lungo una geodetica<sup>4</sup> indipendentemente dal fatto che il campo sia debole o meno; e, al contrario delle coordinate di Riemann, è minkowskiano non in un solo punto, ma lungo tutta la traiettoria.

Per descrivere l'esperienza dell'astronauta in caduta libera vorremmo però poter conoscere la regione di spazio anche nelle sue vicinanze, e questo corrisponde con l'andare al secondo ordine nell'espansione (1.2) e costruire le coordinate normali di Riemann per ogni punto della geodetica. Questa costruzione è possibile, e il risultato sono le coordinate normali di Fermi<sup>5</sup>[1],[3]. In queste coordinate mostreremo che le forze mareali percepite dall'osservatore in caduta libera vanno come  $1/r^3$  proprio come in meccanica newtoniana, e indagheremo le più semplici proprietà geometriche dello spaziotempo oltre l'orizzonte degli eventi. Naturalmente ogni osservazione fatta dall'astronauta nel suo viaggio verso la singolarità a  $r = 0$  non potrà mai essere comunicata all'esterno, e in ogni caso non esiste un'espressione analitica in grado di connettere le coordinate locali di Fermi con quelle globali di Schwarzschild, anche nel caso più semplice di caduta radiale[7].

## 2 Le coordinate di Fermi

Le coordinate di Fermi sorgono da un principio di “common sense” in quanto sono costruite sulla richiesta più ragionevole[4]: desideriamo che un osservatore in ogni punto e istante della sua linea di universo possa tabulare le posizioni, velocità e accelerazioni dei corpi nelle sue immediate vicinanze semplicemente indicandoli con il suo dito e annotandone le coordinate rispetto a una terna di assi ortonormali. Le misure di velocità e accelerazione saranno fatte ovviamente seguendo il suo orologio, che per definizione

---

<sup>4</sup>Cioè la traiettoria dei corpi liberi, sottoposti quindi alla sola forza gravitazionale. Per un breve compendio sul tema delle forze inerziali in relatività si rimanda a: “ Perché la gravità è una forza fittizia in relatività generale?”

<sup>5</sup>Nel resto dell'esposizione ci riferiremo a queste coordinate semplicemente col nome “coordinate di Fermi”. Occorre notare che questo nome è invece utilizzato per riferirsi alle coordinate costruite non su una geodetica, ma su una curva qualsiasi.

è il suo tempo proprio  $\tau$ . In sintesi vogliamo che l'osservatore si porti appresso il suo sistema cartesiano in modo che i vettori base degli assi siano *trasportati parallelamente* lungo la traiettoria<sup>6</sup>. Nello spazio piatto della meccanica classica questa richiesta è triviale, ma il trasporto parallelo di un vettore su una linea definita in uno spazio curvo è una richiesta non banale, perché tale vettore deve soddisfare

$$\frac{dW^\mu(\xi)}{d\xi} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x(\xi))W^\rho(\xi)V^\sigma(\xi) = 0 \quad (2.1)$$

dove  $V^\sigma \equiv \frac{dx^\sigma}{d\xi}$  è il vettore tangente alla curva parametrizzata da  $\xi$  e  $W^\mu = W^\mu(\xi)$  è un vettore definito sulla curva.

Come anticipato, vogliamo costruire le coordinate di Fermi per il caso speciale in cui la curva sia una geodetica, e quindi il moto dell'osservatore sia di caduta libera, cioè localmente inerziale per il principio di equivalenza. Imponiamo che lungo la geodetica "G" sia<sup>7</sup>

$$\boxed{\begin{array}{l} g_{\mu\nu}|_G = \eta_{\mu\nu} \\ \Gamma_{\rho\nu}^\sigma|_G = 0 \end{array}} \quad (2.2)$$

L'obbiettivo è poter descrivere con coordinate rettangolari una regione di spazio delimitata da un tubo che avvolge G. Per fare ciò cerchiamo una trasformazione  $K$  che diagonalizza  $g_{\mu\nu}$  in modo che, secondo la (2.2)

$$K^T g K = \eta \quad (2.3)$$

dove  $\eta$  è la metrica di Minkowski. Nel formalismo delle tetradi, la matrice  $K_{\square\square}$  si esprime con i due indici che trasformano in maniera diversa, uno che risponde alle trasformazioni di Lorentz locali  $\Lambda(x)$  e si indica con un indice greco  $\alpha, \beta, \dots$ , e uno che risponde alle trasformazioni di coordinate generiche  $S(x)$ , per il quale usiamo un indice greco più avanti nell'alfabeto  $\mu, \nu, \sigma, \dots$ <sup>8</sup>[4].

Si ha per convenzione

$$K_{\square\square} \equiv e_\alpha^\mu$$

e la (2.3) si esprime come

$$g_{\mu\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

Usando il formalismo in cui i vettori si possono espandere in combinazione lineare dei generatori dello spazio tangente, possiamo scrivere

$$e_\alpha = e_\alpha^\mu \partial_\mu$$

---

<sup>6</sup>In quanto vengono preservati gli angoli tra i vettori base.

<sup>7</sup>Il simbolo  $|_G$  sta a indicare che la quantità deve essere calcolata su  $G$ .

<sup>8</sup>Per semplicità chiamiamo  $\alpha$  indici di Lorentz, e  $\mu$  indici di universo. Valgono le usuali regole di trasformazione dei tensori nei due tipi di indici, ed è possibile convertire indici  $\mu, \nu$  in indici di Lorentz  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , usando le tetradi. Ad esempio  $T_{\mu\nu\rho} = e_\mu^\alpha e_\nu^\beta e_\rho^\gamma T_{\alpha\beta\gamma}$ .

Detto ciò, non ci resta che cercare 4 vettori ortonormali<sup>9</sup>  $e_\alpha$  con  $\alpha = (0, a)$  e  $a = 1, 2, 3$  cioè uno di tipo tempo e gli altri di tipo spazio, che siano trasportati parallelamente lungo  $G$ . Se indichiamo con  $y^\alpha$  le coordinate di Fermi che dobbiamo determinare, allora è chiaro dalla discussione iniziale che dobbiamo prendere  $y^0 = \tau$ , e quindi è conveniente scegliere

$$e_0^\mu = V^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dy^0}$$

questa scelta ci toglie un po' di lavoro perché la condizione di trasporto parallelo (2.1) è automaticamente soddisfatta per costruzione se  $G$  è parametrizzata dal tempo proprio  $\xi = \tau$ , perché l'equazione della geodetica è

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \equiv \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu V^\rho V^\sigma = 0$$

Quindi essendo  $V^\mu$  il vettore tangente alla curva, abbiamo che  $e_0^\mu$  rimane tangente a  $G$  in ogni punto. Ad esempio supponiamo che  $h(\tau)$  descriva la curva  $G$  nello spaziotempo, e facciamo in modo che  $\tau = 0$  corrisponda al punto  $P_0 = h(0)$ : se  $e_0(0)$  è tangente alla curva in  $P_0$ , allora in un generico punto  $P = h(\tau)$  la tangente sarà  $e_0(0)$  trasportato parallelamente, cioè  $e_0(\tau)$ . Per trovare gli altri tre vettori  $e_a^\mu$  possiamo osservare che la forma della (2.4) suggerisce che questi debbano assomigliarsi agli usuali coefficienti delle matrici di cambio di coordinate  $x \rightarrow x'$ , vale a dire della forma  $\frac{\partial x}{\partial x'}$ . In effetti sarà ciò che troveremo non appena avremo determinato le  $y^a$ .

Partiamo dal punto  $P_0 = h(0)$  e costruiamo la terna cartesiana con i vettori ortonormali  $e_a^\mu$ , e il vettore tangente  $e_0^\mu$  al tempo  $\tau = 0$ . Seguiamo  $G$  fino al punto  $P = h(\tau)$  trasportando parallelamente la base cartesiana, e consideriamo una famiglia  $\zeta$  di geodetiche di tipo spazio uscenti da  $P$  come dei tentacoli. Se  $n^a$  è il versore<sup>10</sup> che indica la direzione da cui esce la generica  $\zeta$  nel punto  $P$ , possiamo etichettare un membro della famiglia in base a questa direzione, cioè  $\zeta = \zeta(n^a, P)$  (vedi figura 1). Se  $e_a^\mu(\tau)$  è la parte spaziale della base cartesiana trasportata parallelamente da  $P_0$  a  $P$ , possiamo esprimere il vettore tangente alla geodetica  $\zeta(n^a, P)$  nel punto  $P$  (cioè calcolato su  $G$ ) come una combinazione lineare della nostra base

$$W^\mu|_G = e_a^\mu n^a \tag{2.5}$$

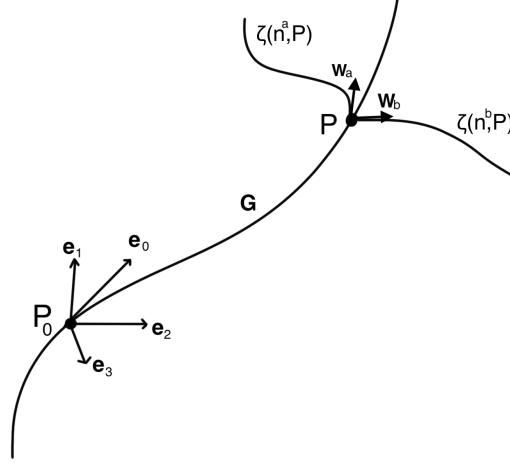
Prendiamo quindi un punto  $Q$  appartenente a  $\zeta(n^a, P)$ , e notiamo che siccome il punto  $P$  ha coordinata temporale  $y_P^0 = \tau$  per costruzione, e siccome  $\zeta$  è di tipo spazio, allora  $Q$  è simultaneo a  $P$ , cioè ha la stessa coordinata  $y_Q^0 = \tau$ . Dato il versore  $n^a$  e la distanza propria  $\sigma$  di  $Q$  su  $\zeta$  in coordinate rettangolari  $\sigma \equiv \sqrt{(y_Q^1)^2 + (y_Q^2)^2 + (y_Q^3)^2}$  le coordinate di Fermi del punto  $Q$  generico sono

$$y^\alpha = (\tau, \sigma n^a \delta_a^i) \tag{2.6}$$

<sup>9</sup>Nel senso che devono soddisfare (2.4).

<sup>10</sup>Nel senso che  $\delta_{ab} n^a n^b = 1$

Figura 1: Costruzione delle coordinate di Fermi per una geodetica  $G$ .



Quindi le coordinate di Fermi descrivono lo spaziotempo in una regione che possiamo pensare come un tubo costruito attorno a  $G$ . In queste coordinate qualsiasi punto di  $G$  al tempo  $\tau'$  è ovviamente descritto da  $y^\alpha = (\tau', 0)$  essendo  $\sigma = 0$ .

Ora occorre dimostrare che, tramite questa descrizione, la trasformazione (2.4) è automaticamente soddisfatta per costruzione. Infatti siccome la legge di trasformazione della metrica dalle coordinate generiche di partenza  $x^\mu$  alle  $y^\alpha$  deve essere

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad (2.7)$$

non ci resta che dimostrare che:

1. Esiste una relazione differenziabile tra le  $x^\mu$  e le  $y^\alpha$
2. Lo Jacobiano della trasformazione è  $J = \det(\partial x^\mu / \partial y^\alpha) \neq 0$

L'ultima richiesta è intuitivamente soddisfatta per costruzione, siccome mostreremo che

$$(\partial / \partial y^\alpha)_G = e_\alpha(\tau)$$

e avendo definito  $e_\alpha(\tau)$  come i classici vettori cartesiani linearmente indipendenti per via dell'ortogonalità, automaticamente  $J \neq 0$  su  $G$ , e per continuità sarà lo stesso anche in un intorno di  $G$ .

Possiamo ora chiederci quali siano le coordinate di  $Q$  espresse nelle coordinate generiche  $x^\mu$ ; ci chiediamo cioè che forma abbia la funzione  $x^\mu(\tau, n^a; \sigma)$ . Naturalmente le  $x^\mu$  devono anch'esse descrivere la geodetica  $\zeta$  parametrizzata con la distanza propria  $\sigma$ , cioè

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\rho\gamma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0 \quad (2.8)$$

stiamo quindi risolvendo una classica equazione differenziale del secondo ordine con le due condizioni iniziali che sono la posizione  $x^\mu(\tau, n^a; 0) = P$  e la velocità data da

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \Big|_G = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^0} \Big|_G = e_0^\mu$$

dove le ultime due relazioni valgono per via di come abbiamo costruito le coordinate di Fermi. Notiamo ora che la (2.8) è invariante per riscaldamento del parametro<sup>11</sup>  $\sigma \rightarrow f^{-1}\sigma$  come è facile verificare sostituendo. Inoltre siccome per ogni geodetica parametrizzata genericamente con  $\lambda$ , la sua tangente è esprimibile come

$$W^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

allora sarà

$$\frac{dx^\mu}{d\sigma} \rightarrow f \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \equiv fW^\mu$$

Cioè la direzione  $n^a$  va in  $fn^a$  secondo la (2.5). Per il teorema di unicità delle equazioni differenziali, la soluzione di (2.8) è quindi tale che

$$x^\mu(\tau, n^a; \sigma) = x^\mu(\tau, fn^a; f^{-1}\sigma)$$

Data questa libertà possiamo scegliere  $f = \sigma$  e quindi

$$x^\mu = x^\mu(\tau, \sigma n^a; 1)$$

cioè le  $x^\mu$  sono funzioni di un oggetto che ha la stessa struttura delle coordinate di Fermi (2.6), ovvero  $x^\mu = x^\mu(y)$  e per i teoremi sulle equazioni differenziali, questa è una relazione differenziabile. Usando la (2.5) possiamo scrivere

$$e_a^\mu n^a = W^\mu \Big|_G \equiv W^\mu(\tau, n^a, \sigma = 0)$$

e l'ultima espressione corrisponde evidentemente a

$$W^\mu(\tau, n^a, \sigma = 0) = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \right)_{\tau, n^a}^{\sigma=0}$$

che possiamo riscrivere come

$$\left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \right)_{\tau, n^a}^{\sigma=0} = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial y^a}{\partial \sigma} \right)_{\tau, n^a}^{\sigma=0}$$

Siccome  $n^a$  è il versore che indica la direzione di uscita dei tentacoli  $\zeta$ , in coordinate di Fermi calcolate su  $G$  è proprio

$$\left( \frac{\partial y^a}{\partial \sigma} \right)_{\tau, n^a}^{\sigma=0} = n^a$$

---

<sup>11</sup>  $f \in \mathbb{R}$

quindi

$$W^\mu|_G = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \right) \Big|_G n^a = e_a^\mu n^a$$

abbiamo cioè dimostrato che

$$e_0^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^0} \Big|_G \quad , \quad e_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \Big|_G \quad (2.9)$$

Quindi  $J \neq 0$  è soddisfatto per costruzione e la (2.7) è applicabile legittimamente. In un certo senso abbiamo anche legittimato il formalismo delle tetradi che porta a scrivere la (2.4). Il risultato è che al primo ordine nelle coordinate di Fermi la metrica è quella di Minkowski, come ci aspettavamo per il principio di equivalenza.

Possiamo ora dimostrare che i simboli di Christoffel in queste coordinate sono nulli lungo la geodetica, come volevamo. La (2.8) si scrive, per la geodetica  $\zeta$

$$\frac{d^2 y^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma_{\rho\gamma}^\alpha \Big|_G \frac{dy^\rho}{d\sigma} \frac{dy^\gamma}{d\sigma} = 0 + \Gamma_{\rho\gamma}^\alpha \Big|_G \frac{dy^\rho}{d\sigma} \frac{dy^\gamma}{d\sigma} = \Gamma_{ij}^\alpha \Big|_G \frac{dy^i}{d\sigma} \frac{dy^j}{d\sigma} = \Gamma_{ij}^\alpha \Big|_G n^i n^j = 0 \implies \Gamma_{ij}^\alpha \Big|_G = 0$$

infatti  $y^\alpha = (\tau, \sigma n^i)$  è lineare in  $\sigma$  e ha solo la parte spaziale di derivata in  $\sigma$  non nulla. Per la geodetica  $G$  si ha invece

$$\frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\gamma}^\alpha \frac{dy^\rho}{d\tau} \frac{dy^\gamma}{d\tau} = 0 + \Gamma_{00}^\alpha \Big|_G \frac{dy^0}{d\tau} \frac{dy^0}{d\tau} = 0 \implies \Gamma_{00}^\alpha \Big|_G = 0$$

essendo  $y^\alpha$  lineare in  $\tau$  e con solo la parte temporale della derivata in  $\tau$  non nulla. Infine il trasporto parallelo lungo  $G$  della base  $e_a^\mu$  nella sua parte spaziale si scrive, per la (2.1)

$$\frac{de_b^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\rho\gamma}^\alpha \Big|_G e_b^\rho V^\gamma \equiv \frac{de_b^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\rho\gamma}^\alpha \Big|_G e_b^\rho e_0^\gamma = 0$$

Ma nelle coordinate di Fermi le componenti della base sono quelle cartesiane

$$\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad \mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0) \quad , \quad \mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0) \quad , \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 0, 1)$$

quindi si ha  $\Gamma_{0i}^\alpha \Big|_G = 0$  e in totale

$$\boxed{\Gamma_{00}^\alpha \Big|_G = 0 \quad , \quad \Gamma_{ij}^\alpha \Big|_G = 0 \quad , \quad \Gamma_{0i}^\alpha \Big|_G = 0} \quad (2.10)$$

Se volessimo descrivere cosa vede un osservatore in caduta libera in un campo gravitazionale a grande distanza da  $r = 0$ , sarebbe sufficiente bloccare lo sviluppo al primo ordine nelle coordinate di Fermi (che adesso chiamiamo  $\tau, xyz$ )

$$ds^2 \approx -d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

e quindi il mondo nelle immediate vicinanze avrebbe, dal suo punto di vista, una geometria euclidea. Tuttavia una volta superato l'orizzonte degli eventi di un buco nero

supermassiccio, la metrica  $\eta_{\alpha\beta}$  non è più una fedele descrizione di quello che vede l'osservatore in caduta libera, perché le forze di marea dovute alla curvatura dello spaziotempo non sono più trascurabili in quanto scalano come una potenza di  $1/r$ . Bisogna quindi spingersi al secondo ordine dello sviluppo della metrica, e ci aspettiamo che i coefficienti dello sviluppo siano le componenti del tensore di Riemann, in quanto rappresentano le deviazioni dalla geometria piatta.

Il tensore di Riemann ha la struttura  $R \sim (\partial\Gamma + \Gamma\Gamma)_{\mu\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu)$ , ma per le (2.10) in coordinate di Fermi si semplifica  $R|_G = \partial\Gamma - \partial\Gamma$  cioè<sup>12</sup>

$$R_{k\rho\lambda}^\mu|_G = (\partial_\rho\Gamma_{k\lambda}^\mu - \partial_\lambda\Gamma_{k\rho}^\mu)|_G \quad (2.11)$$

Intuitivamente sappiamo che  $\partial\Gamma$  contiene  $\partial^2g$  che è proprio il secondo ordine dello sviluppo di Taylor di  $g_{\mu\nu}$  (1.2). Il nostro obiettivo è scrivere  $\partial^2g$  in funzione di  $R$ , passando da  $\partial\Gamma$ . Ad esempio un risultato immediato derivante dal fatto che  $\Gamma_{ij}^\alpha|_G = 0$  è che ovviamente  $\partial_0\Gamma_{ij}^\alpha|_G = 0$ , quindi si ha<sup>13</sup>

$$R_{ij0}^\alpha|_G = \partial_j\Gamma_{i0}^\alpha \equiv \Gamma_{i0,j}^\alpha \quad (2.12)$$

Per ottenere le altre componenti occorre osservare che il secondo ordine in coordinate di Fermi significa[5] andare a comparare due geodetiche della famiglia  $\zeta(n^a, P)$  che possono differire, a parità di direzione  $n^a$ , sia per il punto da cui escono, o, se escono dallo stesso punto, sia per le differenti direzioni  $n^a, n^b$ . Per studiare queste differenze consideriamo  $\epsilon^\mu$  un vettore definito sulla geodetica parametrizzata con  $\xi$ . La sua derivata covariante lungo la curva è il membro a sinistra della (2.1)

$$\frac{D\epsilon^\mu}{D\xi} \equiv \frac{d\epsilon^\mu}{d\xi} + \Gamma_{\rho\gamma}^\mu V^\rho \epsilon^\gamma$$

dove  $V^\rho = dy^\rho/d\xi$  è al solito la tangente alla curva. Nel nostro conto  $\epsilon^\mu$  rappresenterà alcune quantità che descrivono la separazione tra due geodetiche, delle quali ci interessa la variazione  $D/D\xi$ . È più interessante però cercare la velocità di questa variazione, perché la quantità che si vuole studiare potrebbe ad esempio essere trasportata parallelamente, per cui varrebbe la (2.1) che non ci darebbe informazioni; vogliamo quindi calcolare<sup>14</sup>

$$\frac{D^2\epsilon^\mu}{D\xi^2} = \frac{D}{D\xi} \left[ \frac{D\epsilon^\mu}{D\xi} \right] = \frac{D}{D\xi} \left[ \frac{d\epsilon^\mu}{d\xi} + \Gamma_{\rho\gamma}^\mu V^\rho \epsilon^\gamma \right]$$

<sup>12</sup>Poché ogni espressione con cui lavoriamo ora è nel contesto delle coordinate di Fermi, possiamo usare i normali indici  $\mu, \nu, \dots$  al posto della convenzione adottata all'inizio della sezione, che era necessaria per distinguere due tipi di coordinate diversi.

<sup>13</sup>Adottiamo la notazione  $\partial_\alpha\Gamma_{\beta\gamma}^\mu \equiv \Gamma_{\beta\gamma,\alpha}^\mu$

<sup>14</sup>Il secondo termine della seconda equazione si ottiene con la regola della catena

$$\frac{d}{d\xi}\Gamma = \frac{\partial y^\nu}{\partial\xi} \frac{\partial}{\partial y^\nu}\Gamma$$



$$= \frac{d^2 \epsilon^\mu}{d\xi^2} + \partial_\nu \Gamma_{\rho\gamma}^\mu V^\nu V^\rho \epsilon^\gamma + \Gamma_{\rho\gamma}^\mu \frac{d}{d\xi} (V^\rho \epsilon^\gamma) + \Gamma_{\nu\beta}^\mu \left[ \frac{d\epsilon^\beta}{d\xi} + \Gamma_{\omega\alpha}^\beta V^\omega \epsilon^\alpha \right] V^\nu$$

Il termine  $\frac{d}{d\xi} (V^\rho \epsilon^\gamma)$  si calcola ricordando l'espressione della geodetica (o, equivalentemente, che la "velocità" è trasportata parallelamente)

$$\frac{dV^\rho}{d\xi} = \frac{d^2 y^\rho}{d\xi^2} = -\Gamma_{\omega\lambda}^\rho V^\lambda V^\omega$$

per cui si ha, sostituendo e sistemando gli indici muti

$$\frac{D^2 \epsilon^\mu}{D\xi^2} = \frac{d^2 \epsilon^\mu}{d\xi^2} + 2\Gamma_{\rho\gamma}^\mu V^\rho \frac{d\epsilon^\gamma}{d\xi} + [\Gamma_{\rho\gamma,\lambda}^\mu - \Gamma_{\omega\rho}^\mu \Gamma_{\lambda\gamma}^\omega + \Gamma_{\omega\lambda}^\mu \Gamma_{\rho\gamma}^\omega] V^\lambda V^\gamma \epsilon^\rho$$

Questa espressione è più comunemente nota nella forma

$$\frac{D^2 \epsilon^\mu}{D\xi^2} = R_{\gamma\lambda\rho}^\mu V^\lambda V^\gamma \epsilon^\rho \quad (2.13)$$

per cui otteniamo

$$\frac{d^2 \epsilon^\mu}{d\xi^2} + 2\Gamma_{\rho\gamma}^\mu V^\rho \frac{d\epsilon^\gamma}{d\xi} + [\Gamma_{\rho\gamma,\lambda}^\mu - \Gamma_{\omega\rho}^\mu \Gamma_{\lambda\gamma}^\omega + \Gamma_{\omega\lambda}^\mu \Gamma_{\rho\gamma}^\omega - R_{\gamma\lambda\rho}^\mu] V^\lambda V^\gamma \epsilon^\rho = 0 \quad (2.14)$$

Compariamo due tentacoli di uguale direzione, che escono da due punti  $P$  e  $P'$  infinitesimamente vicini. Studiamo quindi la variazione temporale delle coordinate su queste geodetiche per un punto  $Q$  a uguale distanza propria  $\sigma$  su entrambe. Ponendo  $\epsilon^\mu = \left( \frac{dy^\mu}{d\tau} \right)_{n^a, \sigma}$  e ricordando che  $y^\mu = (\tau, \sigma \delta_a^i n^a)$  otteniamo  $\epsilon^\mu = (1, \mathbf{0})$ . Se studiamo la (2.14) con la parametrizzazione  $\sigma$  abbiamo, essendo  $d\epsilon^\mu/d\sigma = d^2 \epsilon^\mu/d\sigma^2 = 0$  e  $V^\lambda = dy^\lambda/d\sigma = (0, n^i)$  sopravvivono solo<sup>15</sup>

$$(\Gamma_{0i,j}^\mu - R_{ij0}^\mu) \Big|_G n^i n^j = 0 \quad \implies \quad \Gamma_{0i,j}^\mu \Big|_G = R_{ij0}^\mu \Big|_G$$

ma questo lo avevamo intuito dalla definizione (2.11). Consideriamo invece due tentacoli uscenti dallo stesso  $P$ , ma che sono irradiati in direzioni leggermente diverse, studiamo cioè  $\epsilon_a^\mu = \left( \frac{dy^\mu}{dn^a} \right)_{\tau, \sigma}$  per un punto calcolato alla stessa distanza  $\sigma$  e allo stesso tempo sulle due geodetiche. Si ha quindi  $\epsilon_a^\mu = (0, \sigma \delta_a^i)$  e dunque  $d\epsilon_a^\mu/d\sigma = (0, \delta_a^i)$  mentre al solito  $V^\gamma = dy^\gamma/d\sigma = (0, n^a \delta_a^i)$  per cui

$$2\Gamma_{\rho\gamma}^\mu n^b \delta_b^\rho \delta_c^\gamma + [\Gamma_{\rho\gamma,\lambda}^\mu - R_{\gamma\lambda\rho}^\mu] n^a \delta_a^\gamma n^b \delta_b^\lambda \delta_c^\rho \sigma = 0$$

<sup>15</sup>Nello sviluppo intorno a  $G$  il parametro di sviluppo è  $\sigma$ , si ha  $\Gamma = \Gamma|_G + \sigma(n^a \delta_a^i) \partial_i \Gamma|_G + O(\sigma^2)$ . Se desideriamo tenere solo i termini lineari in  $\sigma$  è chiaro che  $\Gamma \Gamma = 0$  dato che  $\Gamma|_G = 0$  per quanto visto prima.

Sviluppando

$$\Gamma_{\rho\gamma}^{\mu} = \Gamma_{\rho\gamma}^{\mu}|_G + \sigma(\delta_a^i n^a) \Gamma_{\rho\gamma,i}^{\mu}|_G + O(\sigma^2)$$

tenendo il primo ordine e noto che  $\Gamma|_G = 0$  arriviamo infine a

$$(3\Gamma_{\rho\gamma,\lambda}^{\mu} - R_{\lambda\gamma\rho}^{\mu})n^a n^b \delta_a^{\gamma} \delta_b^{\lambda} \delta_c^{\rho} = 0$$

Calcolando la somma abbiamo, essendo  $n^i n^j = n^j n^i$  e gli  $n$  arbitrari

$$(\Gamma_{ki,j}^{\mu} + \Gamma_{kj,i}^{\mu})|_G = \frac{1}{3}(R_{ijk}^{\mu} + R_{jik}^{\mu})|_G \quad (2.15)$$

Siccome vogliamo ottenere un'espressione per  $\Gamma$  in funzione solo di  $R$ , sommiamo a questa equazione la versione con  $(kij) \rightarrow (ijk)$  e sottraiamo quella con  $(kij) \rightarrow (jki)$ . Per la simmetria dei simboli di Christoffel  $\Gamma_{kj,i}^{\mu} = \Gamma_{jk,i}^{\mu}$  e la antisimmetria di Riemann  $R_{jik}^{\mu} = -R_{jki}^{\mu}$  otteniamo subito

$$\Gamma_{ki,j}^{\mu}|_G = \frac{1}{3}(R_{ijk}^{\mu} + R_{kji}^{\mu})|_G \quad (2.16)$$

Per estrarre i termini  $\partial^2 g$  dai simboli di Christoffel consideriamo la definizione

$$\Gamma_{\rho\gamma}^k \equiv \frac{1}{2}g^{k\beta}(\partial_{\rho}g_{\beta\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\beta\rho} - \partial_{\beta}g_{\rho\gamma}) \quad (2.17)$$

Contraendo con  $g_{\mu k}$  si ha  $g_{\mu k}\Gamma_{\rho\gamma}^k = \frac{1}{2}(\partial_{\rho}g_{\mu\gamma} + \partial_{\gamma}g_{\mu\rho} - \partial_{\mu}g_{\rho\gamma})$ . Se scambiamo  $\mu \leftrightarrow \rho$  l'unica parte simmetrica è in  $\partial_{\gamma}g_{\mu\rho}$ , quindi se sommiamo  $g_{\rho k}\Gamma_{\mu\gamma}^k$  si ottiene  $g_{\mu k}\Gamma_{\rho\gamma}^k + g_{\rho k}\Gamma_{\mu\gamma}^k = \partial_{\gamma}g_{\rho\mu}$ . A questo punto calcoliamo la derivata seconda  $\partial_{\gamma}\partial_{\omega}g_{\rho\mu}$  e valutiamo le quantità su  $G$ , in modo che spariscano i termini<sup>16</sup> in  $\Gamma|_G = 0$ . Siccome in coordinate di Fermi  $g_{\mu k}|_G = \eta_{\mu k}$  otteniamo infine

$$\partial_{\gamma}\partial_{\omega}g_{\mu\rho}|_G = \eta_{\mu k}\Gamma_{\gamma\rho,\omega}^k + \eta_{\rho k}\Gamma_{\gamma\mu,\omega}^k \quad (2.18)$$

Abbiamo tutti gli ingredienti per calcolare il secondo ordine dello sviluppo in coordinate di Fermi

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2!}(\partial_{\gamma}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu})|_G y^{\lambda}y^{\gamma} + O(y^3)$$

Usando la (2.12), la (2.16) e la (2.18) giungiamo finalmente a

$$\boxed{\begin{aligned} g_{00} &= -1 - R_{0i0j}|_G y^i y^j \\ g_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikjl}|_G y^k y^l \\ g_{0i} &= 0 + \frac{2}{3}R_{0jki}|_G y^j y^k \end{aligned}} \quad (2.19)$$

<sup>16</sup>Abbiamo quindi mostrato che il primo ordine dello sviluppo di  $g_{\mu\nu}$  è nullo se calcolato in coordinate inerziali, infatti  $\partial g|_G = \Gamma|_G = 0$

Quindi la geometria per un osservatore in caduta libera è la seguente

$$ds^2 \approx (-1 - R_{0i0j}|_G y^i y^j) d\tau^2 + \left( \delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ikjl}|_G y^k y^l \right) dy^i dy^j + \frac{4}{3} R_{0jki}|_G y^j y^k d\tau dy^i \quad (2.20)$$

Nella pratica partiremo dalle coordinate di Schwarzschild e trasformeremo il tensore di Riemann in coordinate di Fermi tramite la solita equazione

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\gamma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\delta} = R_{\mu\nu\rho\sigma} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu e_\gamma^\rho e_\delta^\sigma \quad (2.21)$$

dove l'ultima uguaglianza è stata dimostrata in coordinate di Fermi. Il punto centrale sarà quindi trovare delle espressioni per  $e_\alpha^\mu$  che soddisfino la (2.4). Tuttavia siccome la metrica di Schwarzschild è diagonale, il conto si fa a vista.

### 3 La Base di Fermi-Schwarzschild

Consideriamo il tensore metrico di Schwarzschild nelle coordinate sferiche  $(T, R, \theta, \phi)$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

dove<sup>17</sup>  $X \equiv 1 - \frac{2M}{R}$ . Si vede subito che una matrice di trasformazione in grado di soddisfare  $g_{\mu\nu} e_\alpha^\mu e_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta}$  è

$$e_\alpha^\mu = \begin{pmatrix} X^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(R \sin \theta) \end{pmatrix}$$

Dalle colonne  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  leggiamo la base della tetrate

$$\mathbf{e}_0 = X^{-1/2} \frac{\partial}{\partial T}, \quad \mathbf{e}_1 = X^{1/2} \frac{\partial}{\partial R}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.2)$$

ed è facile dimostrare che questi vettori sono trasportati parallelamente lungo la geodetica di una caduta libera radiale<sup>18</sup>. Tale geodetica radiale si ottiene definendo l'intervallo di tempo proprio come  $d\tau^2 = -ds^2$ , e una volta diviso per  $d\tau^2$  si pone  $d\phi = d\theta = 0$

$$1 = X \left( \frac{dT}{d\tau} \right)^2 - X^{-1} \left( \frac{dR}{d\tau} \right)^2 \quad (3.3)$$

<sup>17</sup>Lavoriamo in unità  $G = c^2 = 1$ .

<sup>18</sup>Vedi appendici, dove viene svolto il calcolo nel caso della base di Fermi.

che è anche la lagrangiana del moto<sup>19</sup>  $\mathcal{L}(T', R', R)$  per il principio di azione relativistica. La prima equazione di Eulero-Lagrange è quindi

$$\frac{d}{d\tau}(XT') = 0 \quad \Longrightarrow \quad T' = X^{-1}\varepsilon$$

dove  $\varepsilon$  è una costante. La (3.3) diventa

$$\varepsilon^2 = X + \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 \equiv 1 - \frac{2M}{R} + \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 \quad (3.4)$$

Una scelta furba[3] per  $\varepsilon$  è quella di porre  $\varepsilon^2 \equiv 1 - 2M/R_0$  dove  $R_0$  è la posizione iniziale del corpo in caduta libera. Sostituendo nella (3.4) si ha

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{R} - \frac{2M}{R_0} \equiv \frac{r_s}{R} - \frac{r_s}{R_0} \quad (3.5)$$

dove abbiamo chiamato  $r_s \equiv 2M$  il raggio di Schwarzschild. Questa scelta coincide con la condizione che il corpo parte da fermo  $dR/d\tau = 0$  per  $R = R_0$  come si vede facilmente. La soluzione di questa equazione differenziale è una cicloide, quindi la dipendenza di  $R$  da  $\tau$  è espressa in forma implicita tramite un parametro. Volendo semplificare ulteriormente possiamo tuttavia porre  $R_0 \gg r_s$  e prendere la radice negativa della (3.5). Abbiamo subito

$$R^{3/2}(\tau) = R_0^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau \quad (3.6)$$

L'osservatore in caduta libera radiale raggiunge la singolarità in un tempo proprio finito  $\tau^* = \frac{2R_0}{3}\sqrt{\frac{R_0}{r_s}}$  come ci aspettavamo per il principio di equivalenza. Supponiamo tuttavia che durante questa discesa egli mandi dei segnali di luce nella direzione da cui è partito. Un osservatore lontano inizierebbe a ricevere i segnali di luce a distanze temporali sempre maggiori, e come si vede da

$$dT = \varepsilon \frac{d\tau}{1 - \frac{r_s}{R}}$$

l'ultimo segnale di luce in corrispondenza di quando viene oltrepassato l'orizzonte degli eventi a  $R = r_s$  non viene mai ricevuto.

Nonostante la tetrad (3.2) definisca un sistema localmente inerziale che può essere esteso a tutta la geodetica attraverso dei boost di Lorentz locali[2], essa definisce delle coordinate che non sono quelle di Fermi. Nelle coordinate di Fermi si ha  $y^0 = \tau$ , e il vettore base è  $e_0 = (\partial/\partial\tau)|_G$  che avevamo scelto essere  $e_0^\mu = V^\mu$  cioè la quadrivelocità  $(T', R', 0, 0)$  nel caso radiale; esprimendo le componenti nello spazio di Schwarzschild:  $e_0^\mu = V^\mu \partial_\mu$ . Ora è necessario trovare gli altri vettori della tetrad in funzione di questa

<sup>19</sup>Da qui in poi poniamo  $T' \equiv dT/d\tau$ ,  $R' \equiv dR/d\tau$ .

scelta.

Siccome sono fissate per ipotesi, la geodetica non coinvolge  $\theta$  e  $\phi$ , per cui possiamo prendere come vettori  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  quelli calcolati nella (3.2). Dalla condizione di ortogonalità si ricava infine  $\mathbf{e}_1$ , per cui la base di Fermi-Schwarzschild è

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0 = T' \partial/\partial T + R' \partial/\partial R \\ \mathbf{e}_1 = X^{-1} R' \partial/\partial T + X T' \partial/\partial R \\ \mathbf{e}_2 = 1/R \partial/\partial \theta \\ \mathbf{e}_3 = 1/R \sin \theta \partial/\partial \phi \end{cases} \quad (3.7)$$

Infatti, tenendo a mente la (3.3) è possibile verificare che la trasformazione

$$e^\mu_\alpha = \begin{pmatrix} T' & X^{-1} R' & 0 & 0 \\ R' & X T' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(R \sin \theta) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

diagonalizza  $g_{\mu\nu}$  secondo la (2.4). Per andare al secondo ordine sappiamo dalla (2.20) che è necessario conoscere le componenti del tensore di Riemann in queste coordinate, e queste possiamo ottenerle dalla (2.21). Nelle coordinate di Schwarzschild abbiamo

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -\frac{2M}{R^3} \quad , \quad R_{0303} = +\frac{M}{R} X \sin^2 \theta \quad , \quad R_{1313} = -\frac{M}{R} X^{-1} \sin^2 \theta \\ R_{0202} &= +\frac{M}{R} X \quad , \quad R_{1212} = -\frac{M}{R} X^{-1} \quad , \quad R_{2323} = +2MR \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Le componenti non nulle della base invece sono  $e_0^0, e_1^0, e_0^1, e_1^1, e_2^2, e_3^3$ . Il calcolo è tedioso, ma se ad esempio si vuole sapere la prima componente non nulla  $R_{0101}$  si ha esplicitamente

$$\begin{aligned} R_{0101} &= R_{0'1'0'1'} [e_0^0 e_1^1 e_0^0 e_1^1 - e_0^0 e_1^1 e_0^1 e_1^0 - e_0^1 e_1^0 e_0^0 e_1^1 + e_0^1 e_1^0 e_0^1 e_1^0] \\ &= R_{0'1'0'1'} [X^2 (T')^4 - 2(T')^2 (R')^2 + X^{-2} (R')^4] = R_{0'1'0'1'} [X(T')^2 - X^{-1} (R')^2]^2 = R_{0'1'0'1'} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la (3.3). Le altre componenti si ottengono allo stesso modo, e in definitiva abbiamo il tensore di Riemann in coordinate di Fermi

$$\begin{aligned} R_{0101} &= -\frac{2M}{R^3} \quad , \quad R_{0202} = R_{0303} = +\frac{M}{R^3} \quad , \quad R_{2323} = +\frac{2M}{R^3} \\ R_{1212} &= R_{1313} = -\frac{M}{R^3} \end{aligned}$$

La (2.20) diventa quindi (chiamando le coordinate  $y^i$  semplicemente  $xyz$ )

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[ -1 - \frac{M}{R^3} (z^2 + y^2 - 2x^2) \right] d\tau^2 + \left[ 1 + \frac{M}{3R^3} (y^2 + z^2) \right] dx^2 + \left[ 1 + \frac{M}{3R^3} (x^2 - 2z^2) \right] dy^2 + \\ &+ \left[ 1 + \frac{M}{3R^3} (x^2 - 2y^2) \right] dz^2 - \frac{2M}{3R^3} [xz dx dz + xy dy dx - 2yz dy dz] \end{aligned} \quad (3.9)$$

ed è la metrica di Fermi, che dipende da  $\tau$  in quanto  $R = R(\tau)$  secondo la (3.6). In sostanza questa è la geometria che vedrebbe l'osservatore in caduta libera nell'ascensore di Einstein, nel famoso gedankenexperiment del principio di equivalenza.

### 3.1 Forze mareali vicino alla singolarità $r = 0$

Se nella gravità newtoniana consideriamo due corpi soggetti allo stesso campo gravitazionale, ma in località infinitesimamente differenti (prendiamo ad esempio la direzione radiale e collochiamo un corpo a distanza  $r$  e l'altro a  $r + dr_{12}$ ) la differenza percepita in accelerazione radiale è

$$\mathbf{a}_{12} = -\frac{M}{r^2(1 + dr_{12}/r)^2}\hat{r} + \frac{M}{r^2}\hat{r} \approx \frac{2M}{r^3}dr_{12}\hat{r}$$

e questo andamento  $1/r^3$  caratterizza le forze mareali, che sono un'indizio del fatto che il campo gravitazionale varia con la distanza. L'analogo relativistico è l'equazione di deviazione geodetica (2.13)

$$\frac{D^2\epsilon^\mu}{D\xi^2} = R^\mu_{\gamma\lambda\rho}V^\lambda V^\rho \epsilon^\rho$$

con l'unica importante differenza che ora tale effetto è attribuito alla curvatura dello spaziotempo.<sup>20</sup> Vogliamo calcolare le forze di marea per l'osservatore in caduta libera verso la singolarità del buco nero, che è in direzione radiale. Consideriamo quindi la coordinata il cui vettore base  $\mathbf{e}_1$  ha una componente in tale direzione, cioè  $y^1$ . Per fissare le idee supponiamo che la geodetica  $R(\tau)$  sia quella seguita dal baricentro di un astronauta in caduta libera. Immaginiamo di fissare il sistema cartesiano dell'astronauta proprio nel suo baricentro, e supponiamo che l'asse verticale del suo corpo coincida con  $\mathbf{e}_1$ . Nelle coordinate di Fermi la velocità di un punto sulla geodetica principale è  $V^\gamma = (1, \mathbf{0})$  quindi la deviazione geodetica tra il baricentro e la testa dell'astronauta, separati da  $\xi = (0, \xi^1, 0, 0)$  è

$$\frac{D^2\xi^1}{D\tau^2} = R^1_{001}\xi^1 = \frac{2M}{R^3}\xi^1$$

Per le direzioni trasversali invece si ha

$$\frac{D^2\xi^2}{D\tau^2} = -\frac{M}{R^3}\xi^2 \quad , \quad \frac{D^2\xi^3}{D\tau^2} = -\frac{M}{R^3}\xi^3$$

Dunque l'astronauta viene stiracchiato dalla testa ai piedi e compresso ai fianchi del corpo, un fenomeno che è comprensibilmente noto come *spaghetizzazione*. Tale effetto diventa spaventosamente grande per  $R \rightarrow 0$ , che è una regione descrivibile con la soluzione di Schwarzschild solo nel caso di corpi aventi dimensioni fisiche minori del proprio

<sup>20</sup>Com'è noto, tale equazione si ricava considerando la separazione tra due geodetiche vicine  $\epsilon^\mu = y^\mu(\tau) - x^\mu(\tau)$ . Se consideriamo la parte spaziale, il concetto è analogo a quello di accelerazione relativa in meccanica classica.

raggio di Schwarzschild  $r_S$ , cioè i buchi neri. Tuttavia un aspetto molto importante di questo risultato è che non succede niente nella località  $R = r_S$ , che si conferma essere una singolarità delle coordinate e non della geometria. Infatti tale punto non è singolare nemmeno nella metrica di Fermi. Le forze di marea per  $R = r_S \equiv 2M$  vanno come

$$\frac{M}{R_S^3} \sim \frac{1}{M^2}$$

per cui l'astronauta sentirebbe gli effetti della spaghetizzazione all'orizzonte degli eventi solo se  $M$  fosse molto piccolo, ed infatti ciò significherebbe che il raggio di Schwarzschild è molto vicino a  $r \sim 0$ , dove gli effetti mareali diventano mortali. D'altra parte  $M$  è molto grande in un buco nero supermassiccio, per definizione. Di conseguenza  $1/M^2 \sim 0$  e l'astronauta è in grado di oltrepassare l'orizzonte senza accorgersi di niente: nel gergo comune si parla quindi di *singolarità gentile*.

### 3.2 La geometria vicino alla singolarità

Ci proponiamo di studiare le proprietà geometriche di una superficie a simmetria sferica centrata sulla geodetica di caduta libera. Per farlo passiamo a coordinate sferiche prendendo  $x$  come asse polare, cioè  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta \cos \phi$ ,  $z = \rho \sin \theta \sin \phi$ . Dopo alcuni conti tediosi la (3.9) diventa[3]

$$ds^2 = (-1 + b\gamma)d\tau^2 + d\rho^2 + \left(1 + \frac{1}{3}\gamma\right)\rho^2 d\theta^2 + \left(1 + \frac{1}{3}b\gamma - \frac{1}{3}\gamma\right)\rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.10)$$

in cui

$$b \equiv 3 \cos^2 \theta - 1 \quad , \quad \gamma \equiv \frac{M\rho^2}{R^3}$$

Consideriamo un insieme di punti a uguale distanza ortogonale dalla geodetica, ovvero  $\rho = \text{cost}$  e  $\tau = \text{cost}$ . La superficie risultante ha una metrica

$$ds_\Sigma^2 = \left(1 + \frac{1}{3}\gamma\right)\rho^2 d\theta^2 + \left(1 + \frac{1}{3}b\gamma - \frac{1}{3}\gamma\right)\rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

All'ordine zero  $\gamma \ll 1$  la metrica è quella di una sfera  $ds_\Sigma^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ , quindi il cerchio all'equatore ha una lunghezza pari a  $L_\phi = 2\pi\rho$ , come il cerchio passante per un polo  $L_\theta = 2\pi\rho$ . Se consideriamo la regione di spazio vicino alla singolarità  $R \rightarrow 0$  allora  $\gamma$  diventa importante e i conti si modificano in

$$L_\phi = \int ds_{\Sigma|\theta=\pi/2} = \rho \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{2}{3}\gamma\right)^{1/2} d\phi \approx 2\pi\rho \left(1 - \frac{\gamma}{3}\right)$$

$$L_\theta = 2 \int ds_{\Sigma|\phi=\text{cost}} = 2\rho \int_0^\pi \left(1 + \frac{1}{3}\gamma\right)^{1/2} d\theta \approx 2\pi\rho \left(1 + \frac{\gamma}{6}\right)$$

le sfere sono quindi schiacciate nella direzione della singolarità. Si noti tuttavia che queste formule sono valide solo per  $\gamma \leq 3/2$  e tale condizione pone un vincolo  $R \geq \sqrt[3]{r_S/3}\rho^{2/3}$ . Possiamo dare una stima di ordini di grandezza per un buco nero supermassiccio delle stesse dimensioni<sup>21</sup> di Sgr A\* ponendo  $r_S \equiv L \sim 10^{10} m$ . Possiamo porre ragionevolmente  $\rho \sim 10^{-10}L$  e quindi il limite di validità diventa  $R \gtrsim 10^{-7}L \sim 10^3 m$ . Per andare verso la singolarità sarebbe necessario sviluppare la metrica di Fermi agli ordini successivi, perché le potenze di  $1/R$  diventano via via più rilevanti.

### 3.3 Raggi di luce

Supponiamo che l'astronauta in caduta libera verso il buco nero sia dentro una capsula con un laboratorio allestito per misurare la velocità della luce<sup>22</sup>. Ponendo  $ds^2 = 0$  nella (3.10), possiamo considerare la propagazione della luce in direzione radiale ( $d\theta = d\phi = 0$ ), ottenendo

$$\frac{d\rho}{d\tau} = (1 - b\gamma)^{1/2} = \left(1 - f(\theta)\frac{M\rho^2}{R^3}\right)^{1/2}$$

dove  $f(\theta) \equiv b = 3 \cos^2 \theta - 1$  indica che il modulo della velocità è sensibile alla direzione di osservazione, oltre che alla distanza  $\rho$ . Lungo la geodetica  $\rho = 0$  e il valore è quello della relatività ristretta. Una stima sugli ordini di grandezza con  $R \sim 10^{-2}L$ ,  $\rho \sim 10^{-10}L$  ci conduce a

$$\frac{r_S \rho^2}{R^3} \sim 10^{-14}$$

quindi il fattore moltiplicativo di  $f(\theta)$  fa sì che la condizione di realtà della radice sia sempre rispettata nel caso di buco nero supermassiccio.

A parità di distanza  $\rho$  intorno alla geodetica, la velocità della luce assume un valore minimo per  $\theta = 0, \pi$

$$v_{min}^r = \sqrt{1 - \frac{r_S}{R^3}\rho^2} \approx 1 - \frac{r_S \rho^2}{2R^3}$$

e il valore massimo si ha<sup>23</sup> per  $\theta = \pi/2$

$$v_{max}^r = \sqrt{1 + \frac{r_S}{2R^3}\rho^2} \approx 1 + \frac{r_S \rho^2}{4R^3}$$

Gli andamenti ottenuti sono caratteristici di un sistema non-inerziale<sup>24</sup> e abbiamo visto che il discostamento è molto minore dell'unità per un buco nero supermassiccio.

<sup>21</sup>Sagittarius A\*, il buco nero al centro della Via Lattea.

<sup>22</sup>Un tale esperimento potrebbe essere condotto ad esempio con l'ausilio di laser e oscilloscopio.

<sup>23</sup>Notare che, nella regione  $R^* < R < r_S$  in cui è valida l'espansione di Fermi, queste velocità dipendono dal tempo  $\tau$  in quanto  $R = R(\tau)$ .

<sup>24</sup>In coordinate di Kottler-Møller si ha, per un raggio che si propaga lungo l'asse  $x$  verso cui si sta accelerando  $v_{luce} = 1 + ax$  dove  $a$  è l'accelerazione. La luce si propaga con velocità maggiore di  $c$ . Questo è un artefatto delle coordinate utilizzate.



## 4 Limiti di validità

Lo sviluppo (1.2) al secondo ordine è valido ovviamente finché il termine successivo è molto più piccolo del precedente. Nel nostro caso deve essere

$$g_{\mu\nu,\alpha\beta\gamma}x^\alpha x^\beta x^\gamma \ll g_{\mu\nu,\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \quad (4.1)$$

Abbiamo visto che  $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$  corrisponde a  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ , quindi  $g_{\mu\nu,\alpha\beta\gamma}$  corrisponde al gradiente del tensore di Riemann. Calcolando le quantità sulla geodetica in coordinate di Fermi abbiamo dimostrato che tutte le componenti non nulle del tensore di Riemann sono proporzionali a  $M/R^3 \equiv K$  quindi se  $r$  è la dimensione caratteristica su cui stiamo lavorando la (4.1) si traduce in

$$\left| \frac{dK}{dr} \right| r^3 \ll Kr^2$$

ovvero

$$r \left| \frac{d \ln K}{dr} \right| \ll 1 \quad (4.2)$$

Valutando questa condizione nel caso di geodetica radiale abbiamo

$$\frac{3r}{R} \frac{dR}{dr} \equiv \frac{3r}{R} \frac{\partial x^1}{\partial y^i} \ll 1$$

dove  $x^1 \equiv R$  è la coordinata di Schwarzschild e  $y^i$  le coordinate spaziali di Fermi. Leggendo la (3.8) troviamo che  $dR/dr \sim XT' = \varepsilon$  dove  $\varepsilon$  è una costante con le dimensioni di un'energia<sup>25</sup> in unità di  $c$ . Possiamo porre  $\varepsilon = 1$  e quindi abbiamo

$$\frac{r}{R} \ll \frac{1}{3}$$

Questa condizione attesta che la metrica (3.9) è una descrizione accurata dello spaziotempo di un osservatore in caduta libera per una regione tanto più piccola quanto più ci si avvicina alla singolarità, com'è ragionevole aspettarsi.

## 5 Conclusioni

Le coordinate normali di Fermi si basano sul principio di equivalenza e permettono di avere una terna cartesiana trasportata da un osservatore in caduta libera, con la quale egli può descrivere lo spaziotempo in una regione di dimensioni  $\rho$  molto ridotte rispetto a quelle del buco nero. Tramite queste coordinate abbiamo derivato il fenomeno della spaghettificazione e dimostrato l'andamento  $1/r^3$  delle forze mareali per un buco nero di Schwarzschild. Ne abbiamo concluso che un astronauta in caduta verso una singolarità di massa  $M$ , percepisce delle forze mareali pari a  $1/M^2$  sull'orizzonte degli eventi:

---

<sup>25</sup>Corrisponde all'energia iniziale del corpo in caduta libera.

se  $M$  è molto grande, il passaggio è impercettibile.

Inoltre, seguendo [3] abbiamo calcolato gli effetti distorsivi della sfera nella nuova geometria (3.10): il luogo dei punti a uguale distanza dal centro è schiacciato verso la direzione della singolarità. Abbiamo poi verificato che la velocità dei raggi di luce è sensibile alla direzione di osservazione  $\theta$  in coordinate sferiche e assume valori massimo e minimo che hanno approssimativamente la stessa forma di quella calcolata in coordinate non-inerziali per i sistemi accelerati[6].

Queste coordinate possono essere utili per indagare il problema dei due corpi in relatività generale, in quanto si usa la metrica (3.9) come forma asintotica di quella percepita da una massa piccola nei pressi di una massa più grossa, in regime perturbativo[9]. Sono state inoltre utilizzate per descrivere gli effetti gravitazionali negli spettri dell'atomo di idrogeno, sempre in regime perturbativo[10].

## A Trasporto parallelo della base di Fermi-Schwarzschild

Dimostriamo in questa sede che la base

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0 = T' \partial/\partial T + R' \partial/\partial R \\ \mathbf{e}_1 = X^{-1} R' \partial/\partial T + X T' \partial/\partial R \\ \mathbf{e}_2 = 1/R \partial/\partial \theta \\ \mathbf{e}_3 = 1/R \sin \theta \partial/\partial \phi \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

È trasportata parallelamente lungo la geodetica dell'osservatore in caduta libera radialmente, parametrizzata con  $\tau$ . Per farlo dobbiamo considerare la lagrangiana del moto

$$1 = X(T')^2 - X^{-1}(R')^2 \quad (\text{A.2})$$

e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}(X T') = 0 \quad \Longrightarrow \quad X T'' + \frac{2M}{R^2} R' T' = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(-2X^{-1}R') &= -\frac{\partial}{\partial R}(X^{-1})(R')^2 + \frac{\partial X}{\partial R}(T')^2 \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad R'' + \frac{M}{R^2} X(T')^2 - \frac{M}{R^2} X^{-1}(R')^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Inoltre consideriamo i simboli di Christoffel per la metrica di Schwarzschild (scriviamo solo quelli che ci servono)<sup>26</sup>

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{M}{R^2} X^{-1} \quad , \quad \Gamma_{11}^1 = -\frac{M}{R^2} X^{-1} \quad , \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{M}{R^2} X \\ \Gamma_{32}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad , \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Dello sviluppo  $\mathbf{e}_\alpha = (e_\alpha)^\mu \partial_\mu$  leggiamo le componenti da (A.1) e l'equazione del trasporto parallelo recita

$$\frac{de_\alpha^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\gamma}^\mu e_\alpha^\rho V^\gamma = 0$$

dove  $V^\gamma = (T', R', \theta', \phi')$ . Consideriamo la componente  $\mu = 0$  di  $\mathbf{e}_0$ , si ha

$$\frac{e_0^0}{d\tau} + \Gamma_{01}^0 e_0^0 V^1 + \Gamma_{10}^0 e_0^1 V^0 = T'' + \frac{M}{R^2} X^{-1} T' R' + \frac{M}{R^2} X^{-1} R' T' = 0$$

che è soddisfatta per la (A.3). Per la componente  $\mu = 1$

$$\frac{de_0^1}{d\tau} + \Gamma_{00}^1 e_0^0 V^0 + \Gamma_{11}^1 e_0^1 V^1 = R'' + \frac{M}{R^2} X T' T' - \frac{M}{R^2} X^{-1} R' R' = 0$$

<sup>26</sup>Vale a dire  $(T, R, \theta, \phi) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ .

che è soddisfatta per la (A.4). Consideriamo ora  $\mathbf{e}_1$ . La componente  $\mu = 0$

$$\frac{de_1^0}{d\tau} + \Gamma_{10}^0 e_1^1 V^0 + \Gamma_{01}^0 e_1^0 V^1 = \frac{d}{d\tau}(X^{-1}R') + \frac{M}{R^2} X^{-1}(XT')T' + \frac{M}{R^2} X^{-1}(X^{-1}R')R' = 0$$

perché è un'altra forma della (A.4). Per la componente  $\mu = 1$  si ha

$$\frac{de_1^1}{d\tau} + \Gamma_{00}^1 e_1^0 V^0 + \Gamma_{11}^1 e_1^1 V^1 = \frac{d(XT')}{d\tau} + \frac{M}{R^2} X(X^{-1}R')T' - \frac{M}{R^2} X^{-1}(XT')R' = 0$$

in quanto  $d/d\tau(XT') = 0$  secondo la (A.3). Per quanto riguarda  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  la dimostrazione è triviale in quanto si tratta di sostituire i simboli di Christoffel:

$$\frac{de_2^2}{d\tau} + \Gamma_{21}^2 e_2^2 V^1 = \frac{d}{d\tau} \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} R' = -\frac{1}{R^2} R' + \frac{1}{R^2} R' = 0$$

$$\frac{de_3^3}{d\tau} + \Gamma_{32}^3 e_3^3 V^2 + \Gamma_{31}^3 e_3^3 V^1 = \frac{-R'}{R \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \theta' + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{1}{R \sin \theta} \theta' + \frac{1}{R} \frac{1}{R \sin \theta} R' = 0$$

Come volevasi dimostrare, la base scelta è trasportata parallelamente lungo  $G$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] Fermi, E. “*Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria*” (1921).  
Nuovo Cim. 22, 176;
- [2] Misner, C.W, Thorne, K. & Wheeler, J.A. “*Gravitation*” (1972). Pag. (285-287)  
W.H. Freeman. San Francisco. 1973;
- [3] Manasse F.K, Misner, C.W. “*Fermi normal coordinates and some basic concepts in differential geometry*” (1963).  
Journal of Mathematical Physics 4,735;
- [4] Zee, A. “*Einstein Gravity in a nutshell*” (2013).  
Princeton university press;
- [5] Poisson, E. “*A Relativist’s toolkit, the mathematics of black hole mechanics*” (2004).  
Cambridge university press;
- [6] Petkov V. “*Propagation of light in non-inertial reference frames*” .  
arXiv:gr-qc/9909081v7;
- [7] Bini D, Geralico A, Jantzen R.T. “*Fermi coordinates in Schwarzschild spacetime: closed form expressions*” .  
arXiv:1408.4947v1;
- [8] Blau M. “*Lecture notes on general relativity*” .  
Link; Pag. 132.
- [9] Manasse F.K, “*Distortion in the Metric of a Small Center of Gravitational Attraction due to its Proximity to a Very Large Mass*” (1963).  
Journal of Mathematical Physics 4, 746;
- [10] Parker, L. Pimentel, L.O. “*Gravitational perturbation of the hydrogen spectrum*” (1981).  
Physical Review Vol 25, n.12.