Capitolo 1

L'oscillatore armonico

Soluzione 1.1 *Consideriamo* $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ *e la possibile soluzione* $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$. *La derivata prima è*

$$\frac{dx}{dt} = x_0 \frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -x_0 \omega \sin(\omega t)$$

La derivata seconda

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0 \omega \frac{d}{dt} \sin(\omega t) = -x_0 \omega(\omega) \cos(\omega t)$$

ovvero

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \underbrace{(x_0 \cos(\omega t))}_{x(t)} = -\omega^2 x$$

da cui capiamo subito che

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

è soddisfatta.

Soluzione 1.2 *Partendo da* $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ *abbiamo*

$$x(0) = x_0 \cos(0) = x_0$$

E la velocità è

$$\frac{dx}{dt} = -x_0 \omega \sin(\omega t)$$

per $t = 0$ *si vede che*

$$\dot{x}(0) = -x_0 \omega \sin(0) = 0$$

Quindi è soluzione del problema di una massa che parte da ferma con la molla tirata di una certa lunghezza x_0.

Soluzione 1.3 *Il problema è un'equazione differenziale del secondo ordine, specificato completamente con due condizioni iniziali*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \\ x(0) = L_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

Come visto nel libro, la soluzione si ottiene con il principio di sovrapposizione

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

con A e B che si ottengono imponendo le condizioni iniziali. Il risultato è che la velocità ha il valore

$$\dot{x}(t) = -L_0\omega\sin(\omega t) + v_0\cos(\omega t)$$

Al tempo $t = \pi/(6\omega)$ la velocità è

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{6\omega}\right) = -L_0\omega\sin\frac{\pi}{6} + v_0\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{L_0\omega}{2} + v_0\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soluzione 1.4 *Partiamo da*

$$m\beta^2\gamma\ddot{z}(t) + gz(t) = 0$$

e vogliamo ricondurlo alla forma dell'oscillatore armonico

$$\ddot{G}(t) + \omega^2 G(t) = 0$$

quindi dividiamo tutto per $m\beta^2\gamma$

$$\ddot{z}(t) + \frac{g}{m\beta^2\gamma}z(t) = 0$$

Per cui possiamo identificare la frequenza con

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{m\beta^2\gamma}}$$

e quindi il periodo di oscillazione del sistema

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\beta^2\gamma}{g}}$$

Soluzione 1.5 *Si ha*

$$W = \frac{1}{2}k(x_I^2 - x_F^2)$$

con $x_I = L/2$ *e* $x_F = L/4$

$$W = \frac{1}{2}kL^2\frac{3}{16}$$

Inserendo i valori $k = 100\,N/m$ *e* $L = 1\,m$

$$W = \frac{3}{32}k = 100\frac{3}{32} \sim 9.3\,J$$

Soluzione 1.6 *Si ha*

$$\boldsymbol{F} = (3x, 2y, 1)$$

e la traiettoria nel tempo è

$$\boldsymbol{r}(t) = (2t, t, 0)$$

Il lavoro si calcola come

$$W = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt$$

dove

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(2t, t, 0) = (2, 1, 0)$$

Quindi dobbiamo calcolare il prodotto scalare

$$\boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (3x, 2y, 1) \cdot (2, 1, 0) = 6x + 2y$$

Ora dobbiamo ricordarci di sostituire a x *e* y *la traiettoria nel tempo* $x(t) = 2t$ *e* $y(t) = t$, *dato che l'integrale sul percorso è stato trasformato in un integrale nel tempo*

$$W = \int_0^1 (6x + 2y)\,dt = \int_0^1 [6(2t) + 2(t)]\,dt = 6t^2 + t^2\Big|_0^1 = 6 + 1 = 7\,J$$

dove abbiamo supposto che le unità fossero in metri.

Soluzione 1.7 *Nella situazione iniziale l'energia è tutta potenziale*

$$E = \frac{1}{2}kL^2$$

Questa energia si conserva in tutto il moto:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

per $x = L/4$ *quanto vale* v? *Risolviamo*

$$\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{4}\right)^2$$

dunque

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{15}{16}kL^2 \qquad \rightarrow \quad v = \frac{1}{4}\sqrt{15\frac{k}{m}}L$$

e ricordando che

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

abbiamo che

$$v = \frac{\omega L}{4}\sqrt{15}$$

è la velocità raggiunta dalla massa nel punto $x = L/4$.

Soluzione 1.8 *Partiamo da*

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

calcoliamo la derivata rispetto al tempo e poniamola uguale a zero, dato che l'energia è una costante su tutta la traiettoria

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}v^2 + \frac{1}{2}k\frac{d}{dt}x^2$$

$$= \frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}k2x\frac{dx}{dt} = 0$$

essendo

$$\frac{dx}{dt} = v$$

semplifichiamo le velocità

$$m\cancel{v}\frac{dv}{dt} + kx\cancel{v} = 0$$

dunque essendo

$$\frac{dv}{dt} = \ddot{x}$$

ricaviamo, dividendo per m

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

ovvero con $\omega^2 = k/m$ *proprio l'equazione dell'oscillatore armonico*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$