# Capitolo 10

# Quanti e onde

**Soluzione 10.1** *Usiamo la formula* $hf = \Delta E$ *con*

$$\Delta E = E_1 \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2} \right)$$

*Quindi*

$$f = \frac{E_1}{h} \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2} \right) \sim 2.7 \cdot 10^{14} Hz$$

*Quindi la radiazione emessa non è nello spettro visibile, essendo nell'infrarosso.*

**Soluzione 10.2** *Si ha*

$$r_n = n^2 \left( \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m} \right)$$

*Dunque*

$$\frac{r_n}{r_m} = \frac{n^2}{m^2} = \frac{36}{9} = 4$$

*Dunque il livello* $n = 6$ *è ben 4 volte più distante dal nucleo rispetto a* $m = 3$*. D'altra parte*

$$m r_n v_n = n\hbar$$

$$m r_m v_m = m\hbar$$

*Facendo il rapporto*

$$\frac{v_n}{v_m} \frac{r_n}{r_m} = \frac{n}{m}$$

*quindi sostituendo*

$$\frac{v_n}{v_m} \frac{n^2}{m^2} = \frac{n}{m}$$

*ovvero*

$$\frac{v_n}{v_m} = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

*Quindi la velocità nel livello* $n = 6$ *è la metà della velocità nel livello* $m = 3$*.*

**Soluzione 10.3** *Dobbiamo calcolare*

$$P = \int_0^{L/3} \psi_1^2(x) = \frac{2}{L} \int_0^{L/3} \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx$$

*Facendo il cambio di variabile*

$$u = \frac{\pi}{L}x$$

*trasformiamo l'integrale in*

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \sin^2(u)\, du$$

*Che risolviamo di nuovo sostituendo*

$$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$$

*Per ottenere*

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/3} (1-\cos(2u))\, du = \frac{1}{\pi}(u - \frac{1}{2}\sin(2u))\Big|_0^{\pi/3}$$

*per cui*

$$P = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \sim 5\%$$

**Soluzione 10.4** *Si ha*

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

*dunque*

$$E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}[(n+1)^2 - n^2] = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(2n+1)$$

*Per $n = 3$ si trova*

$$\Delta E = 1.5\, eV(2(3)+1) = 10.5\, eV$$

*La luce emessa sarà di frequenza*

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{10.5\, eV}{4.135 \cdot 10^{-15}\, eV \cdot s} = 25.3 \cdot 10^{14}\, Hz$$

*L'emissione è circa nell'ultravioletto, visibile da alcuni insetti.*
*Se invece $E = 2\, MeV$ basta moltiplicare il risultato precedente per $\frac{2\cdot 10^6}{1.5}$, ottenendo*

$$f = 33.7 \cdot 10^{20}\, Hz \sim 3 \cdot 10^{21}\, Hz$$

*Questi sono raggi gamma molto energetici: le energie sono quelle del livello nucleare, quindi il modello della particella in una scatola è una rozza prima approssimazione per descrivere i livelli nucleari.*

**Soluzione 10.5** *Calcoliamo*

$$\langle x\rangle = \int_0^L x\,|\psi(x)|^2\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$$

*Cambiando variabile*

$$\frac{n\pi}{L}x = u$$

*si ha*

$$\langle x\rangle = \frac{2L}{(n\pi)^2}\int_0^{n\pi} u\sin^2(u)\,du$$

*e al solito usiamo*

$$\sin^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}$$

*per cui*

$$\langle x\rangle = \frac{L}{(n\pi)^2}\int_0^{n\pi} u\,du - \frac{L}{(n\pi)^2}\int_0^{n\pi} u\cos(2u)du$$

*Il secondo integrale si fa per parti*

$$\int_0^{n\pi} u\cos(2u) = \underbrace{\frac{1}{2}u\sin(2u)\Big|_0^{n\pi}}_{zero} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{n\pi}\cos(2u)du}_{zero}$$

*Dunque*

$$\langle x\rangle = \frac{L}{(n\pi)^2}\int_0^{n\pi} u\,du = \frac{L}{(n\pi)^2}\frac{(n\pi)^2}{2} = \frac{L}{2}$$

*Come potevamo aspettarci, la particella sta in media al centro della scatola, per simmetria. Il risultato non dipende dal livello.*