Capitolo 2

Il pendolo e la gravità

Soluzione 2.1 *Si ha*

$$U = -mg\ell\cos\theta$$

e quindi

$$\Delta U \equiv U_f - U_I = -mg\ell\cos\theta_f - (-mg\ell\cos\theta_I)$$
$$= -mg\ell(\cos\theta_f - \cos\theta_I) = -mg\ell(\cos(0) - \cos\frac{\pi}{3}) = -mg\ell(1 - \frac{1}{2})$$

quindi

$$\Delta U = -mg\ell\frac{1}{2} = -4.9\,J$$

L'energia potenziale è diminuita perché $U_f < U_I$, quindi è aumentata l'energia cinetica nel punto più basso al fine di tenere $E =$ costante.

Soluzione 2.2 *La soluzione generica di $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ è*

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

e se le condizioni iniziali sono $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \nu_0$ allora

$$\theta(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A\cos(0) = 0 \qquad \to A = 0$$

e

$$\dot{\theta}(t) = B\omega\cos(\omega t)$$

quindi

$$\dot{\theta}(0) = B\omega = \nu_0 \qquad \to B = \frac{\nu_0}{\omega}$$

per cui la soluzione del problema è

$$\theta(t) = \frac{\nu_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Il seno oscilla tra -1 e 1, dunque

$$-\frac{\nu_0}{\omega} \le \theta \le \frac{\nu_0}{\omega}$$

l'ampiezza totale spazzata è

$$2\frac{\nu_0}{\omega}$$

e rispetto alla verticale l'ampiezza è

$$\theta_{max} = \frac{\nu_0}{\omega}$$

Soluzione 2.3 *La soluzione generica di* $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ *è*

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

e se le condizioni iniziali sono $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \nu_0$ *allora procediamo esattamente come nel problema della molla che partiva da* x_0 *con velocità* v_0. *Inseriamo le condizioni iniziali*

$$\theta(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = \theta_0$$

Ora calcoliamo la derivata

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

e la condizione iniziale

$$\dot{\theta}(0) = -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) = \nu_0$$

Da queste condizioni ricaviamo

$$A = \theta_0 \qquad B = \frac{\nu_0}{\omega}$$

Per cui la soluzione è

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t) + \frac{\nu_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Soluzione 2.4 *L'equazione dell'oscillatore armonico è*

$$\ddot{r}(t) + \frac{g}{R}r(t) = 0$$

e con la condizione $r(0) = R$ *dove* R *è il raggio della Terra (il corpo è lasciato cadere sulla superficie terrestre), la soluzione nel tempo è chiaramente un coseno*

$$r(t) = R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$$

Il centro della Terra è raggiunto quando $r(t^*) = 0$ *per un certo* t^*, *dato che* $r(t)$ *ha l'origine proprio al centro del pianeta. Avremo* $r(t) = 0$ *quando*

$$\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t^*\right) = 0 \qquad \to \qquad \sqrt{\frac{g}{R}}t^* = \frac{\pi}{2}$$

infatti il coseno si annulla quando il suo argomento è un multiplo dispari dell'angolo di $90°$. *Si ricava*

$$t^* = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \equiv \frac{T}{4}$$

essendo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Usando i dati del libro $T \sim 40$ *minuti, quindi* $t^* \sim 10$ *minuti per raggiungere il centro della Terra.*
La velocità è

$$\frac{dr}{dt} = -R\sqrt{\frac{g}{R}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$$

e per $t = t^*$ *l'argomento del seno è pari a* $\pi/2$, *per quanto detto prima, quindi la velocità è*

$$\frac{dr}{dt} = -R\sqrt{\frac{g}{R}}$$

inserendo il valore $R \sim 6300 \cdot 10^3 m$ *e* $g \sim 9.8 m/s^2$ *si ottiene*

$$v_{max} = 7.85\, km/s$$

una velocità abbastanza sconcertante.