Capitolo 3

Il moto dei pianeti

Soluzione 3.1 *Siccome* $r = \infty$ *si ha*

$$U(r \to \infty) \propto \frac{1}{r} \to 0$$

dunque l'asteroide parte con solo energia cinetica.

$$E = \frac{1}{2}mv_i^2$$

per la conservazione si avrà

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_S}{r}$$

nel punto $r^* = 250 \cdot 10^6\, km$ *di minima distanza con il Sole la velocità è quindi*

$$v^2 = v_i^2 + \frac{2GM_S}{r^*}$$

dunque ricaviamo, se $v_i = 20\, km/s$

$$v = \sqrt{v_i^2 + \frac{2GM_S}{r^*}} \approx 38\, km/s$$

Soluzione 3.2 *Essendo*

$$\xi(\theta) = C\cos(\theta) + \frac{GM_S}{\psi^2}$$

con

$$\xi \equiv \frac{1}{r}$$

per $\theta = 0$ *richiediamo che*

$$\xi = \frac{1}{r_p}$$

dove r_p *è il perielio. Chiamando*

$$\frac{\psi^2}{GM_S} \equiv r_e$$

dato che ha le dimensioni di una lunghezza, avremo

$$C\cos(0) + \frac{1}{r_e} = \frac{1}{r_p} \qquad \rightarrow \quad C = \frac{r_e - r_p}{r_e r_p}$$

La formula trovata per l'eccentricità è

$$\epsilon = \frac{C\psi^2}{GM_S} \equiv Cr_e = \frac{r_e - r_p}{r_e r_p} r_e = \frac{r_e}{r_p} - 1$$

Il valore dato nel testo per r_e *è pari a*

$$r_e \equiv \frac{\psi^2}{GM_S} = 150 \cdot 10^6 \, km$$

Dunque

$$\epsilon \approx 1.02 - 1 \sim 0.02$$

Il valore sperimentale è $\epsilon \sim 0.016$, *quindi la distanza relativa con il nostro calcolo è*

$$\frac{0.02 - 0.016}{0.016} = 25\%$$

Il valore di ϵ *per la Terra è molto basso, quindi la sua traiettoria è quasi circolare.*

Soluzione 3.3 *Partiamo da*

$$E = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{\psi^2}{r^2} \right) - \frac{GmM_S}{r}$$

e

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\psi^2/GM_S}{(1+\epsilon\cos(\theta))^2} \epsilon \sin\theta\dot{\theta} = \frac{\epsilon\sin\theta}{1+\epsilon\cos\theta}\frac{\psi}{r}$$

dopo avervi sostituito $\dot{\theta} = \psi/r^2$. *D'altra parte si ha*

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(1+\epsilon\cos\theta)^2}{\psi^4}(GM)^2$$

Sostituendo queste espressioni giungiamo a

$$E = \frac{1}{2} m \frac{(GM)^2}{\psi^2} [\epsilon^2 \sin^2\theta + 1 + \epsilon^2 \cos^2\theta + 2\epsilon\cos\theta] - \frac{m(GM)^2}{\psi^2}(1+\epsilon\cos\theta)$$

ovvero, raccogliendo

$$E = \frac{m(GM)^2}{\psi^2} \left[\frac{\epsilon^2 + 1 + 2\epsilon\cos\theta}{2} - 1 - \epsilon\cos\theta \right]$$

ovvero

$$E = \frac{1}{2} m \frac{(GM)^2}{\psi^2}(\epsilon^2 - 1)$$

che può essere scritto anche come

$$E = \frac{1}{2} m (GM) \frac{(GM)}{\psi^2}(\epsilon^2 - 1)$$

e con $\psi^2/GM = b^2/a$ *ricaviamo la formula trovata nel testo*

$$E = \frac{GmM}{2b^2} a(\epsilon^2 - 1)$$

Soluzione 3.4 *Supponiamo che l'orbita del pianeta sia tale che* $E = -E_0$ *con* E_0 *un valore positivo, in modo che* $E < 0$*. Per la conservazione dell'energia dovrà essere sempre* $E = -E_0 < 0$*. Fuggire dall'orbita significa che* $U \approx 0$ *e quindi l'energia è tutta cinetica, ovvero*

$$E \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} m v^2$$

tuttavia siccome $E < 0$ *per la conservazione dell'energia allora*

$$\frac{1}{2} m v^2 = -E_0 < 0$$

il che non è possibile perché $v^2 > 0$ *ovviamente. Un pianeta che ha un'orbita chiusa non potrà mai lasciare l'orbita di sua spontanea volontà.*

Soluzione 3.5

$$\frac{v_{afelio}}{v_{perielio}} = \frac{r(0)}{r(\pi)} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \approx 0.968$$

Quindi per la conservazione del momento angolare

$$m v_{af} r_{af} = m v_{per} r_{per} \quad \to \quad r_{af} = r_{per} \frac{v_{per}}{v_{af}} = r_{per} \frac{1}{0.968}$$

$$= 1.03 r_{per} \approx 151.8 \cdot 10^6 \, km$$