# Capitolo 4

# Un modo più rapido di lavorare

**Soluzione 4.1** *La situazione è illustrata in figura 4.1. Usiamo $r$ come coordinata polare per descrivere l'estensione della molla rispetto alla posizione di equilibrio verticale $\ell$. In ogni istante la lunghezza del pendolo sarà quindi $\ell + r$ e l'angolo è $\theta$. L'energia potenziale elastica dipende dall'estensione $r$, quindi*

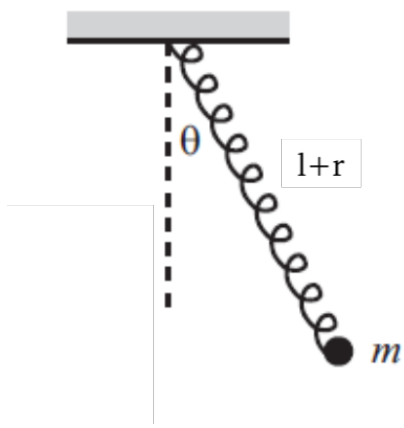


Figura 4.1: Un pendolo-molla in coordinate polari.

$$U_{ek} = \frac{1}{2}kr^2$$

*Invece l'energia potenziale gravitazionale dipende dalla quota raggiunta*

$$U = -mg\ell_{tot}\cos\theta$$

*dove*

$$\ell_{tot} \equiv \ell + r$$

*L'energia potenziale totale è quindi*

$$U = -mg(\ell + r)\cos\theta + \frac{1}{2}kr^2$$

*L'energia cinetica è semplicemente quella in coordinate polari, specificando ora che la lunghezza dell'arco descritto è data da $\ell + r$. Quindi*

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (\ell + r)^2\dot{\theta}^2\right)$$

*Il sistema ha quindi due gradi di libertà: $r$ e $\theta$, e la lagrangina del sistema è*

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (\ell + r)^2\dot{\theta}^2\right) + mg(\ell + r)\cos\theta - \frac{1}{2}kr^2$$

*Avremo due equazioni di Eulero-Lagrange:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r}$$

*Queste equazioni producono le equazioni del moto, una volta semplificata la massa $m$*

$$(\ell + r)\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -g\sin\theta$$

$$\ddot{r} = (\ell + r)\dot{\theta}^2 + g\cos\theta - \omega_0^2 r$$

*dove al solito $\omega_0^2 = k/m$. Questo sistema non ammette una soluzione semplice nemmeno per piccole oscillazioni, e la sua soluzione varia molto anche per condizioni iniziali leggermente diverse: è un esempio di sistema caotico.*