Capitolo 5

La covarianza di Galileo e le simmetrie

Soluzione 5.1 *Essendo* $t' \equiv T = t$ *partiamo da*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t'$$

con $\boldsymbol{V} = (2, 0, 0)$. *Quindi*

$$\begin{cases} x = X + Vt \\ y = Y \\ z = Z \end{cases}$$

inserendo le coordinate $(X, Y, Z) = (0, -2, 1)$, *le coordinate dell'evento rispetto ad Alice saranno*

$$\begin{cases} x = 0 + 2t = 2t \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

quindi rispetto ad Alice l'evento si muove nel tempo e ha vettore posizione $\boldsymbol{r} = (-2t, -2, 1)$. *Infatti l'evento era fermo nel tempo nel sistema di Bob, quindi si muove solidale a lui, ed è ovvio che la velocità dell'evento rispetto ad Alice sia la stessa del moto di Bob*

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (2, 0, 0) = \boldsymbol{V}$$

Soluzione 5.2 *Partiamo da* $\boldsymbol{R}(t) = (3t'^2, t' \sin(t) + 4, 1)$ *in coordinate di Bob. La trasformazione è*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{V}t'$$
$$t = t'$$

con

$$\boldsymbol{V} = (2, 4, 0)$$

dunque

$$x = X + 2t$$

$$y = Y + 4t$$

$$z = Z$$

e sostituendo $X = 3t^2$, $Y = t\sin(t) + 4$ *troviamo il raggio vettore del corpo secondo Alice*

$$\boldsymbol{r}(t) = (3t^2 + 2t, t\sin(t) + 4 + 4t, 1)$$

Soluzione 5.3 *La trasformazione di coordinate è una rotazione il cui angolo* θ *dipende dal tempo come* $\theta(t) = \Omega t$.

$$x' = x\cos(\Omega t) + y\sin(\Omega t)$$

$$y' = -x\sin(\Omega t) + y\cos(\Omega t)$$

La velocità secondo l'osservatore rotanti ha componenti

$$\dot{x}' = \dot{x}\cos(\Omega t) - x\Omega\sin(\Omega t) + \dot{y}\sin(\Omega t) + y\Omega\cos(\Omega t)$$

$$\dot{y}' = -\dot{x}\sin(\Omega t) - x\Omega\cos(\Omega t) + \dot{y}\cos(\Omega t) - y\Omega\sin(\Omega t)$$

Mentre l'accelerazione è

$$\ddot{x}' = \ddot{x}\cos(\Omega t) - 2\dot{x}\Omega\sin(\Omega t) - x\Omega^2\cos(\Omega t) +$$

$$\ddot{y}\sin(\Omega t) + 2\dot{y}\Omega\cos(\Omega t) - y\Omega^2\sin(\Omega t)$$

$$\ddot{y}' = -\ddot{x}\sin(\Omega t) - 2\dot{x}\Omega\cos(\Omega t) + x\Omega^2\sin(\Omega t)$$
$$+\ddot{y}\cos(\Omega t) - 2\dot{y}\Omega\sin(\Omega t) - y\Omega^2\cos(\Omega t)$$

Siccome nelle coordinate dell'osservatore inerziale

$$(\ddot{x}, \ddot{y}) = (2, 3) \qquad \rightarrow_{\int dt}\rightarrow (\dot{x}, \dot{y}) = (2t, 3t)$$

(se il corpo parte da fermo a $t = 0$*), abbiamo*

$$\ddot{x}' = 2\cos(\Omega t) - 4t\Omega\sin(\Omega t) - x(t)\Omega^2\cos(\Omega t) +$$

$$3\sin(\Omega t) + 6t\Omega\cos(\Omega t) - y(t)\Omega^2\sin(\Omega t)$$

$$\ddot{y}' = -2\sin(\Omega t) - 4t\Omega\cos(\Omega t) + x(t)\Omega^2\sin(\Omega t)$$
$$+3\cos(\Omega t) - 6t\Omega\sin(\Omega t) - y(t)\Omega^2\cos(\Omega t)$$

Il vettore della forza totale agente sul corpo, interpretata dall'osservatore non inerziale è

$$\boldsymbol{F}' = m(\ddot{x}', \ddot{y}')$$

$$= [2\cos(\Omega t) - 4t\Omega\sin(\Omega t) - x(t)\Omega^2\cos(\Omega t) + 3\sin(\Omega t) + 6t\Omega\cos(\Omega t) - y(t)\Omega^2\sin(\Omega t)]\hat{\boldsymbol{x}} +$$

$$[-2\sin(\Omega t) - 4t\Omega\cos(\Omega t) + x(t)\Omega^2\sin(\Omega t) + 3\cos(\Omega t) - 6t\Omega\sin(\Omega t) - y(t)\Omega^2\cos(\Omega t)]\hat{\boldsymbol{y}}$$

di gran lunga più complicata di quella dell'osservatore inerziale, che era semplicemente

$$\boldsymbol{F} = (\ddot{x}, \ddot{y}) = (2, 3)$$

Soluzione 5.4 *Tra le leggi* $\boldsymbol{F} = (x^2 + x_0^2, 4(y - y_0), -2)$ *;* $\boldsymbol{F} = (x - x_0, \frac{1}{(y-y_0)^2}, \frac{1}{z^2 - z_0^2})$ *;* $\boldsymbol{F} = (\frac{1}{x-x_0}, \sin(k(y-y_0)), 4)$ *solo la terza rispetta il principio di Galileo, perché qualsiasi trasformazione*

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t$$

ha questo effetto sulle coordinate

$$x - x_0 \to x' - x_0'$$

$$y - y_0 \to y' - y_0'$$

che lascia della stessa forma l'espressione della forza

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{x - x_0}, \sin(k(y - y_0)), 4\right)$$

Per quanto riguarda

$$\boldsymbol{F} = (x - x_0, \frac{1}{(y - y_0)^2}, \frac{1}{z^2 - z_0^2})$$

potrebbe quasi essere una buona legge della fisica, se non fosse per la componente z*. Che andrebbe ad esempio in*

$$\frac{1}{z^2} \to \frac{1}{(z' + Vt')^2 - (z_0' + Vt')^2}$$

e dunque non sarebbe covariante.