Capitolo 8

La covarianza di Einstein

t

Soluzione 8.1 *Siccome gli eventi "inizio film" e "fine film" avvengono nello stesso punto del sistema di riferimento di Bob, la dilatazione temporale avviene rispetto ad Alice*

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{180}{\sqrt{1-(0.35)^2}} minuti \approx 192\, minuti$$

Soluzione 8.2 *Siccome gli eventi "nascita" e "morte" avvengono nello stesso punto del sistema di riferimento del muone, possiamo usare*

$$\Delta t_{Terra} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2.20}{\sqrt{1-(0.95)^2}}\,\mu s \sim 7.045\,\mu s$$

La distanza media percorsa rispetto a noi prima di decadere è quindi

$$\Delta s = (0.95c)(\Delta t_{Terra}) = 0.95c(7.045\,\mu s) \sim 2\,km$$

ed è per questo motivo che riusciamo ad osservare i muoni.

Soluzione 8.3 *Dalle trasformazioni di Lorentz*

$$\begin{cases} T = \dfrac{t+\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ \\ X = \dfrac{x+Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ \\ Y = y \end{cases}$$

Seguendo quanto fatto nel testo calcoliamo il differenziale $dY = dy$, e il differenziale del tempo

$$dT = \frac{dt + \frac{V}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Raccogliamo un dt

$$dT = dt\frac{1 + \frac{V}{c^2}v_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Quindi calcoliamo $dY/dT \equiv v'_y$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v_x}$$

ed essendo $\frac{dy}{dt} \equiv v_y$

$$v'_y = v_y\frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v_x}$$

che è la trasformazione delle velocità sull'asse ortogonale alla direzione del moto relativo. Nel nostro caso abbiamo $v_x = 0$ dato che il corpo si muoveva solo sull'asse y di Alice

$$v'_y = v_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Inserendo $v_y = 0.3c$ e $V = 0.01c$

$$v'_y = 0.3\sqrt{1 - (0.01)^2} \approx 0.299c$$

Infatti essendo $1 - \frac{V^2}{c^2} < 1$ si ha sempre

$$v'_y < v_y$$

Il moto nella direzione ortogonale a quella del moto relativo è sempre rallentato.

Soluzione 8.4 *La condizione sugli eventi osservati da Alice è*

$$|c\Delta t| < |\Delta x| \qquad \rightarrow \qquad \frac{|\Delta x|}{|\Delta t|} > c$$

L'intervallo $\Delta t'$ rispetto a Bob si ottiene come

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Se vogliamo $\Delta t' = 0$ *cioè per Bob i due eventi sono simultanei, deve essere*

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{c^2}{V}$$

Ed essendo

$$\frac{|\Delta x|}{|\Delta t|} > c$$

allora deve essere

$$\frac{c^2}{V} > c \qquad \rightarrow \qquad \frac{V}{c} < 1$$

quindi è sempre possibile trovare un osservatore che vede simultanei i due eventi, dato che deve muoversi con una velocità $V < c$.
D'altra parte se calcoliamo $\Delta x'$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

e richiediamo $\Delta x' = 0$ *deve essere*

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = V$$

e siccome

$$\frac{|\Delta x|}{|\Delta t|} > c$$

ciò significa che dovrebbe essere

$$V > c$$

il che non è mai possibile. Due eventi separati in modo che $|c\Delta t| < |\Delta x|$ *possono sempre essere simultanei rispetto a qualche osservatore, ma mai essere visti nello stesso punto dello spazio. Affinché sia possibile avere* $\Delta x' = 0$ *per qualche osservatore, i due eventi devono essere separati in modo che* $|c\Delta t| > |\Delta x|$.

Soluzione 8.5 *Usiamo*

$$W = \Delta T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_f^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Sostituendo i valori

$$W = 105 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0.95)^2}} - 1 \right) \sim 231\, MeV$$