Capitolo -1

Analisi matematica

Soluzione -1.1 *Si ha*

$$\frac{x^4 x^{2/3} a^{4/5}}{\sqrt[3]{x^5}\sqrt[4]{a^3x^2}} \equiv \frac{x^4 x^{2/3} a^{4/5}}{x^{5/3}a^{3/4}x^{2/4}} = x^4 x^{2/3} x^{-5/3} x^{-1/2} a^{4/5} a^{-3/4}$$

$$= x^{4+2/3-5/3-1/2} a^{4/5-3/4} = x^{5/2} a^{1/20} = \sqrt{x^5} a^{1/20}$$

Soluzione -1.2

$$\frac{4x+2}{x} + 3 = \frac{1}{x} - 12$$

Per $x = 0$ *si ottiene un risultato assurdo* $\infty = \infty$, *quindi non è soluzione. Possiamo dunque moltiplicare tutto per* $x \neq 0$

$$4x + 2 + 3x = 1 - 12x$$

da cui

$$19x = -1 \qquad \to \qquad x = -\frac{1}{19}$$

Soluzione -1.3 *I punti sono* $(4, 5)$ *e* $(7, -4)$ *dunque*

$$d = \sqrt{(4-7)^2 + (5-(-4))^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

Soluzione -1.4 *Si ha* $3x + 1 = 4 - 5x$, *dunque*

$$3x + 5x = 4 - 1 = 3 \qquad \to \quad 8x = 3 \qquad \to \quad x = \frac{3}{8}$$

Il punto di incontro ha coordinata $x = 3/8$ *e per trovare la coordinata* y *sostituiamo in qualsiasi delle due rette. Ad esempio*

$$y = 3\frac{3}{8} + 1 = \frac{17}{8}$$

il punto $(3/8, 17/8)$ *è ciò che si vede in figura 1.*

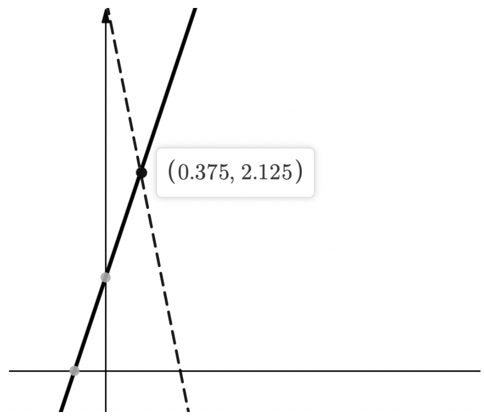

Figura 1: Grafico di $y = 3x + 1$ e $y = 4 - 5x$. Il punto di incontro è in $x = 3/8$, come si vede.

Soluzione -1.5 *Portandoci nella forma $y = ax + b$ abbiamo*

$$y = -x + 1 \qquad y = \frac{1}{7}x + \frac{3}{7} \qquad y = -7x + 4$$

quindi per le tre rette abbiamo $a = -1$, $a = 1/7$, $a = -7$. Si può ottenere anche prendendo due punti qualunque $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e facendo la differenza tra i valori per ciascuna retta.

Soluzione -1.6 *Vogliamo che valga l'uguaglianza*

$$ax + 2 = 2 - 3x$$

nel punto $x = 2$.
Sostituendo e semplificando deve essere

$$a(2) + 2 = 2 - 3(2) \qquad \rightarrow \qquad a = -3$$

cioè le due rette devono coincidere sempre $-3x + 2 = -3x + 2$ per ogni x.
Infatti proviamo a risolvere l'equazione per x qualunque portando tutto ciò che riguarda x al membro di sinistra:

$$(a + 3)x = 2 - 2 = 0$$

questa ha due soluzioni possibili, o è $(a - 3) = 0$, oppure è $x = 0$.
Siccome le rette hanno lo stesso coefficiente angolare $+2$ (che è il punto in cui incontrano l'asse y, cioè il punto in cui $x = 0$), l'unico modo che hanno per incontrarsi anche nel punto $x = 2$ è quello di essere una uguale all'altra, cioè di coincidere sempre. Stiamo cioè dicendo che l'unico modo di avere $(a+3)x = 0$ per $x = 2$ è proprio che sia $a = -3$, dal momento che $2 \neq 0$.
Se invece avessimo avuto $y_1 = ax + 5$ e $y_2 = 2 - 3x$, per avere intersezione nel punto $x = 2$, cioè

$$a(2) + 5 = 2 - 3(2)$$

avremmo dovuto avere un'inclinazione

$$a = -\frac{9}{2}$$

cioè la retta sarebbe dovuta essere

$$y_1 = -\frac{9}{2}x + 2$$

puoi verificare graficamente sul sito **https://www.desmos.com/calculator?lang=it** *scrivendo le due rette* y_1 *e* $y_2 = 2 - 3x$.

Soluzione -1.7 *Vediamo se* $f(x) = x + 2$ *rispetta la condizione di linearità*

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Si ha

$$f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + 2$$

e

$$f(x_1) + f(x_2) = [x_1 + 2] + [x_2 + 2] = (x_1 + x_2) + 4$$

quindi

$$f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$$

e la funzione $f(x)$ *non può essere lineare. Tuttavia è una retta, quindi è lineare nel senso che il suo grafico è una linea. In realtà le funzioni* $f(x) = ax + b$ *si chiamano funzioni affini. Le funzioni affini diventano lineari quando* $b = 0$.

Soluzione -1.8 *Per spostare il vertice da* $(0, 0)$ *a* $(3, -2)$ *si può procedere traslando rigidamente il disegno della parabola* $y = x^2$. *Anzitutto la centriamo sul punto* $x = 3$ *con la seguente trasformazione*

$$x^2 \to (x - 3)^2$$

poi trasciniamo verticalmente tutto il disegno verso il basso di -2 *unità. Il risultato è*

$$y = (x - 3)^2 - 2$$

che ha vertice in $(3, -2)$.

Soluzione -1.9 *Per* $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ *deve essere* $x \geq 0$ *e* $x \neq 2$. *Per* $f(x) = \frac{1}{3x-5} + \frac{1}{x}$ *deve essere* $3x - 5 \neq 0$ *e* $x \neq 0$, *dunque il dominio è tutta la retta reale, tranne i due punti* $x \neq 5/3$ *e* $x \neq 0$. *Per* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ *deve essere* $4 - x > 0$ *ma non uguale a zero perché sta a denominatore. Quindi la funzione esiste per* $x < 4$ *e non è compreso il punto* $x = 4$.

Soluzione -1.10 *Usando la formula*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si trova che $y = 3x^2 + 2x - 1$ *incontra* $y = 0$ *per* $x = -1$ *e* $x = 1/3$. *Invece per* $y = -x^2 + 2x + 3$ *si ha zero per* $x = -1$ *e* $x = 3$. *Per* $y = x^2 - 6$ *si ha zero per* $x = \pm\sqrt{6}$. *Per* $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ *si ha un unico zero ovviamente per* $x = 2$. *Per* $y = 2x^2 + 3x + 2$ *non si hanno zeri. Questo perché* $b^2 - 4ac < 0$. *La parabola, come puoi verificare, sta graficamente ben sopra l'asse* x.

Soluzione -1.11 *Deve essere* $3x^2 + 2 = -2x + 3$, *ovvero* $3x^2 + 2x - 1 = 0$ *che possiamo risolvere con*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si ha l'incontro in due punti: per $x = -1$ *e* $x = 1/3$. *Le coordinate* y *di questi punti sono* $y = -2(-1) + 3 = 5$ *e* $y = -2/3 + 3 = 7/3$. *Ciò si verifica graficamente.*

Soluzione -1.12 *Si ha*

$$c_1 = \ell \sin\alpha \qquad c_2 = \ell \cos\alpha$$

con $\alpha = 60^\circ$ *e* $\ell = \sqrt{3}$

$$c_1 = \sqrt{3}\sin(60^\circ) = \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$c_2 = \sqrt{3}\cos(60^\circ) = \sqrt{3}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soluzione -1.13 *Partendo da*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

con $\alpha = \beta$ *si ha*

$$\sin(2\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$$

ovvero

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

E partendo da

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

con $\alpha = \beta$ *si ha*

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

che può essere scritto diversamente usando $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

oppure

$$\cos(2\alpha) = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Soluzione -1.14 *Dalla formula*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

con $\alpha = 45°$ *e* $\beta = 60°$ *si ricava*

$$\sin(105°) = \sin(45°)\cos(60°) + \sin(60°)\cos(45°)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

Soluzione -1.15 *Si ha*

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Se sommiamo membro a membro queste due espressioni

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

quindi otteniamo

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

Se invece le sottraiamo

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$$

otteniamo, come richiesto

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

Soluzione -1.16 *Dalle definizioni*

$$\tan(30°) = \frac{\sin(30°)}{\cos(30°)} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(60°) = \frac{\sin(60°)}{\cos(60°)} = \frac{\sqrt{3}}{2}2 = \sqrt{3}$$

$$\tan(75°) = \frac{\sin(75°)}{\cos(75°)} = \frac{\sin(45°+30°)}{\cos(45°+30°)}$$

E

$$\sin(45°+30°) = \sin(45°)\cos(30°) + \sin(30°)\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

Quindi

$$\cos(45^\circ + 30^\circ) = \sqrt{1 - \sin^2(45^\circ + 30^\circ)} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}(1+\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Dunque

$$\tan(75^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1+\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1+3+2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2+\sqrt{3}$$

Soluzione -1.17 *Dalla definizione*

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Anzitutto raccogliamo $\cos\alpha$ *a numeratore e denominatore e semplifichiamo*

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha\cos\beta + \sin\beta}{\cos\beta - \tan\alpha\sin\beta}$$

Raccogliamo ora $\cos\beta$ *a numeratore e denominatore, semplifichiamo e giungiamo a*

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Soluzione -1.18 *Si ha*

$$30^\circ \quad \to \quad \to \pi\frac{30}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$60^\circ \quad \to \quad \to \pi\frac{60}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$45^\circ \quad \to \quad \to \pi\frac{45}{180} = \frac{\pi}{4}$$

$$120^\circ \quad \to \quad \to \pi\frac{120}{180} = \frac{2}{3}\pi$$

$$150^\circ \quad \to \quad \to \pi\frac{150}{180} = \frac{5}{6}\pi$$

Soluzione -1.19 *Gli zeri di*

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

si avranno per valori dell'argomento

$$\frac{2\pi}{T}x = n\pi$$

ovvero per

$$x = n\frac{T}{2}$$

cioè multipli interi del semi-periodo.

Soluzione -1.20

$$\frac{20}{4 + 30\cos^2(\tan(2x^\gamma))} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1})$$

Separiamo i due membri

$$\frac{20}{4 + 30\cos^2(\tan(2x^\gamma))} = \cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $4 + 30\cos^2(\tan(2x^\gamma))$ *dato che tale termine non si annulla mai, essendo una somma di quantità positive. Poi dividiamo entrambi i membri per* $\cos^2(\sqrt{4\beta^2+1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}$ *dato che anche tale termine non si annulla mai, essendo somma di quantità positive.*

$$4 + 30\cos^2(\tan(2x^\gamma)) = \frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Isoliamo la funzione di x

$$30\cos^2(\tan(2x^\gamma)) = \frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}} - 4$$

Siccome il secondo membro è sempre positivo, prendiamo la radice quadrata

$$\cos(\tan(2x^\gamma)) = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}} - 4}$$

Prendiamo ora l'arco-coseno di entrambi i membri[1]

$$\tan(2x^\gamma) = \arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}} - 4}\right)$$

[1] L'argomento del membro di destra è sicuramente minore di 1, dunque è possibile calcolare l'arcoseno.

E quindi applichiamo l'arcotangente a entrambi i membri

$$2x^\gamma = \arctan\left\{\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2+1})+\frac{1}{\sqrt{3}}}-4}\right)\right\}$$

Non ci resta che elevare tutto per $1/\gamma$.

$$x = \frac{1}{2^{1/\gamma}}\arctan^{1/\gamma}\left\{\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2+1})+\frac{1}{\sqrt{3}}}-4}\right)\right\}$$

Soluzione -1.21 *È sufficiente mandare* x *e* y *in*

$$x \to x-3 \qquad y \to y-2$$

Quindi

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$

è l'equazione del cerchio con centro in $(3,2)$. *Puoi verificarlo calcolando il grafico su* `https://www.desmos.com/calculator?lang=it`.

Soluzione -1.22 *Vi appartiene solo il punto* $(\sqrt{3},2)$ *essendo*

$$(\sqrt{3})^2+(2)^2=3+4=7$$

Soluzione -1.23 *Appartengono a*

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

solo i punti $(1,\pm 3/2)$.

Soluzione -1.24 *Usando la regola*

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$f'(x) = 48x^3+4x$; $f'(x)=\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$; $f'(x)=-\frac{1}{5}\frac{1}{x^{6/5}}$; $f'(x)=-\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; $f'(x)=2t^4x$; $f'(x)=\frac{5}{x^6}$

Soluzione -1.25 *Da* $f(x)=5x^{-4/3}$ *si ha*

$$\frac{df}{dx}=-\frac{20}{3}x^{-7/3}=f'(x)$$

Nel punto $x=1$ *il coefficiente angolare della retta tangente è quindi*

$$m=f'(1)=-\frac{20}{3}(1)^{-7/3}=-\frac{20}{3}$$

Soluzione -1.26 *Partendo da* $s(t) = 4t^5 + t^2 + 3$ *si ha*

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 20t^4 + 2t$$

Soluzione -1.27 *Dobbiamo calcolare*

$$\lim_{h\to} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

Sfruttiamo

$$\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h}$$

Il primo limite si calcola sfruttando quanto visto nel testo

$$\cos(h) = \sqrt{1 - \sin^2 h} \approx \sqrt{1 - h^2}$$

per cui

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\sqrt{1-h^2} - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\sqrt{1-h^2} - 1)}{h} \frac{\sqrt{1-h^2} + 1}{\sqrt{1-h^2} + 1} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(-h^{\cancel{2}})}{\cancel{h}(\sqrt{1-h^2} + 1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(-h)}{2} = 0$$

Mentre il secondo limite è ormai semplice per noi

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \approx \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cancel{h}}{\cancel{h}} = \sin(x)$$

Dunque

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} = -\sin(x)$$

Soluzione -1.28 *Dobbiamo calcolare la derivata di*

$$y = \arctan(x)$$

Facciamo la funzione inversa in entrambi i membri

$$\tan(y) = \tan(\arctan(x)) = x$$

Derivando rispetto a y, trattandola quindi come variabile indipendente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\tan(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Quindi capovolgendo l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

E dalla definizione abbiamo

$$x = \tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\cos(y)}$$

Facendo il quadrato

$$x^2 = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}$$

ricaviamo $\cos^2 y$ *da questa equazione per trovare*

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

dunque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

che è la derivata di $\arctan(x)$.

Soluzione -1.29

$$f'(x) = \frac{3\sin^2(\sqrt{2x})\cos(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{3}{4}\sqrt{1+\cos(x)} - \frac{3x\sin(x)}{8\sqrt{1+\cos(x)}}$$

$$f'(x) = -\frac{3\sin(x)\cos^2(x)}{\sqrt{1-\cos^6 x}}$$

$$f'(x) = -\frac{2[-\sin(x)+x\cos(x)+1]}{(\sin(x)-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-\frac{4x(1+x)}{\tan(x^2)}}{2\sqrt{1+x}\sin(x^2)}$$

Soluzione -1.30 *Abbiamo* $y = 2x^2 - 3x + 12$. *La sua derivata è*

$$y' = 4x - 3$$

che si annulla in corrispondenza di

$$4x - 3 = 0 \qquad \to \qquad x = \frac{3}{4}$$

il quale è evidentemente un punto di minimo assoluto, dato che $y' < 0$ *per* $x < 3/4$ *e* $y' > 0$ *per* $x > 3/4$. *La coordinata* y *di tale punto è*

$$y(\frac{3}{4}) = 2\frac{9}{16} - 3\frac{3}{4} + 12 = \frac{18}{16} - \frac{9}{4} + 12 = \frac{87}{8}$$

Quindi il vertice di $y = 2x^2 - 3x + 12$ *è nel punto*

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{87}{8}\right)$$

Soluzione -1.31 *Dobbiamo calcolare il massimo della funzione*

$$v(t) = 12\frac{20t+1}{20t^2+4}$$

La derivata è, trascurando la costante moltiplicativa 12

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}(20t+1)(20t^2+4) - (20t+1)\frac{d}{dt}(20t^2+4)}{(20t^2+4)^2}$$

$$= \frac{20(20t^2+4) - 2(20t+1)t}{(20t^2+4)^2}$$

Ponendo questa derivata uguale a zero (e quindi considerando solo il numeratore) ci ritroviamo con

$$10t^2 + t - 2 = 0$$

della quale prendiamo solo la soluzione positiva $t = 2/5$. *Questo è un punto di massimo in quanto la derivata è negativa per* $t > 2/5$ *e positiva per* $t < 2/5$. *La velocità massima si trova sostituendo nella funzione originale*

$$v(\frac{2}{5}) = 12\frac{20\frac{2}{5}+1}{20\frac{4}{25}+4} = 12\frac{9}{\frac{16}{5}+4} = 12\frac{15}{12} = 15$$

Soluzione -1.32

$$f''(x) = 2\cos(3x - 2 + x^2) - (2x+3)^2\sin(3x - 2 + x^2)$$

$$f''(x) = 36x^2 + \frac{4}{(x-2)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6(\cos(x)+3)^3}{(3x+\sin(x))^4} - \frac{6\sin(x)(\cos(x)+3)}{(3x+\sin(x))^3} + \frac{\cos(x)}{(3x+\sin(x))^2}$$

Soluzione -1.33 *Date* $f(t) = \sin(\omega t)$ *e* $f(t) = \cos(\omega t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\sin(\omega t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\omega\cos(\omega t)\right) = -\omega^2\sin(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\cos(\omega t)\right) = -\frac{d}{dt}\left(\omega\sin(\omega t)\right) = -\omega^2\cos(\omega t)$$

In entrambi i casi

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f$$

Che può essere scritta come

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0$$

che in fisica è nota come equazione dell'oscillatore armonico.

Soluzione -1.34 *Data* $f(x,y) = 3\sin(x^2 y) + xy + \frac{1}{y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy\cos(x^2 y) + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2\cos(x^2 y) + x - \frac{2}{y^3}$$

Soluzione -1.35 *Data* $f(x,y,z) = 3x^2 + z\sin(y) + z$; *con* $x(t) = \sqrt{t}$; $y(t) = t^2$; $z = 2\sin(t) + 4t$ *si ha la derivata totale rispetto al tempo*

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{df}{dt} = 6x\frac{dx}{dt} + z\cos(y)\frac{dy}{dt} + (\sin(y)+1)\frac{dz}{dt}$$

$$= 6(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} + (2\sin(t) + 4t)\cos(t^2)(2t) + (\sin(t^2)+1)(2\cos(t)+4)$$

Ovvero

$$\frac{df}{dt} = 3 + 4t(\sin(t) + 2t)\cos(t^2) + 2(\sin(t^2)+1)(\cos(t)+2)$$

Soluzione -1.36 *Data* $v(t) = 2t^2 + 3\sin(t)$ *l'accelerazione è, per definizione,*

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 4t + 3\cos(t)$$

Mentre lo spazio percorso si ottiene integrando la velocità nel tempo

$$x(t) = \int [2t^2 + 3\sin(t)]dt = 2\int t^2 dt + 3\int \sin(t)dt = 2\frac{1}{3}t^3 - 3\cos(t) + C$$

Soluzione -1.37 *L'area è*

$$A = \int_0^1 f(x)dx = \int (3x^3 + x^4 - x)dx = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{9}{20}$$

Soluzione -1.38

$$\int (5x+1)^5\,dx$$

Poniamo $5x+1=u$, *quindi facendo il differenziale* $5\,dx = du$ *ovvero* $dx = \frac{1}{5}du$

$$\frac{1}{5}\int (u)^5\,du = \frac{1}{5}\frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{30}(5x+1)^6 + C$$

Consideriamo ora

$$\int \sqrt{4x+2}\,dx$$

Proviamo $4x+2=u$, *quindi* $dx = \frac{1}{4}du$ *e*

$$\int \frac{1}{4}\sqrt{u}\,du \equiv \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{6}u^{3/2} + C = \frac{1}{6}(4x+2)^{3/2} + C$$

Consideriamo ora

$$\int \cos(2x+1)\,dx$$

Poniamo $2x+1=u$, *quindi* $dx = \frac{1}{2}du$, *dunque*

$$\frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C$$

Soluzione -1.39

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^5(x)}\,dx$$

proviamo a porre $u=\cos(x)$. *Si ha, facendo il differenziale*

$$du = -\sin(x)dx$$

dunque

$$dx = \frac{1}{-\sin(x)}du$$

$$\int \frac{\sin(x)}{u^5}\,\frac{1}{-\sin(x)}du = -\int u^{-5}\,du$$

$$= \frac{1}{4}u^{-4} + C = \frac{1}{4}\frac{1}{\cos^4(x)} + C$$

Soluzione -1.40

$$\int x\underbrace{\cos x}_{g'(x)}\,dx = x\sin x - \int (1)\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

$$\int x^2 \underbrace{\sin x}_{g'(x)}\, dx = x^2(-\cos x) - \int (2x)(-\cos x)\, dx$$
$$= -x^2(\cos x) + 2 \underbrace{\int x \cos x\, dx}_{\textit{Già calcolato}}$$
$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C$$

$$\int_0^{\pi/4} x \underbrace{\sin(2x)}_{g'(x)}\, dx = x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (1)\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$$
$$= -\frac{1}{2}[x\cos(2x)]\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}$$

Soluzione -1.41 *Usando l'integrazione per parti*

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(x)\, dx = \cos(x)\sin(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\sin(x))\sin(x)\, dx$$

E siccome

$$\cos(x)\sin(x)\Big|_0^{2\pi} = \cos(2\pi)\sin(2\pi) - \cos(0)\sin(0) = 0 - 0 = 0$$

abbiamo proprio

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\sin(x)\, dx$$

ovvero

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx$$

come volevamo dimostrare.

Soluzione -1.42 *Essendo*

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx \equiv A$$

la somma dei due integrali è

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x))\, dx = 2A$$

usando l'identità fondamentale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

abbiamo

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x))\, dx = \int_0^{2\pi} (1)\, dx = 2\pi$$

quindi

$$2A = 2\pi \qquad \to A = \pi$$

dunque

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx = \pi$$

Soluzione -1.43 *Partendo da*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} \equiv (1-x)^{-1/5}$$

Abbiamo, usando

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{5} + \frac{3}{25} x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

Soluzione -1.44

$$a(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \gamma t^2}}$$

Raccogliamo β^2 *a denominatore perché vogliamo avere* $\sqrt{\gamma} t/\beta \ll 1$

$$a(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{\gamma} t}{\beta}\right)^2}}$$

Ponendo

$$x \equiv \left(\frac{\sqrt{\gamma} t}{\beta}\right)^2$$

ci siamo ricondotti alla forma

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

con $n = -1/2$. *Dunque*

$$a(t) \approx \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\gamma} t}{\beta}\right)^2\right) + \mathcal{O}(t^4) = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta^2} t^2\right) + \mathcal{O}(t^4)$$

Soluzione -1.45 *Si ha* $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!}$.
Per $f(x) = \sin(x)$ *chiaramente* $f(0) = 0$. *Poi*

$$f'(x) = \cos(x) \qquad \rightarrow \qquad f'(0) = 1$$

E $f''(x) = -\sin(x)$ *motivo per cui*

$$f''(0) = -\sin(0) = 0$$

Poi si ha

$$f'''(x) = -\frac{d}{dx}\sin(x) = -\cos(x)$$

e quindi

$$f'''(0) = -\cos(0) = -1$$

per cui

$$\begin{aligned}\sin(x) &\approx 0 + (1)x + (0)\frac{x^2}{2!} + (-1)\frac{x^3}{3!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!}\end{aligned}$$

Soluzione -1.46 *Partiamo da*

$$\frac{dy}{dx} + 2x^2 - \sin x = 2$$

Separiamo dy *e* dx

$$dy = (2 + \sin x - 2x^2)dx$$

Quindi integriamo ambo i lati

$$y(x) = \int (2 + \sin x - 2x^2)\, dx = 2x - \cos x - \frac{2}{3}x^3 + C$$

quindi la soluzione è

$$y(x) = 2x - \cos x - \frac{2}{3}x^3 + C$$

con C *costante arbitraria, puoi verificare sostituendo.*

Soluzione -1.47 *Partiamo da*

$$2\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2} = 1$$

Separiamo dy *e* dx

$$2dy = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Ovvero, integrando

$$2y(x) = x + \frac{1}{x} + c_1$$

ovvero, chiamando $C \equiv c_1/2$

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} + C$$

Soluzione -1.48 *Partiamo da*

$$v_1(t) = 2t + 3$$

$$v_2(t) = 6t + 2$$

Integrando

$$s_1(t) = t^2 + 3t + c_1$$

$$s_2(t) = 3t^2 + 2t + c_2$$

e usando le condizioni iniziali $s_1(0) = 4$, $s_2(0) = 0$ *troviamo* $c_1 = 4$ *e* $c_2 = 0$. *L'incrocio avviene per* $s_1(t) = s_2(t)$ *ovvero*

$$t^2 + 3t + 4 = 3t^2 + 2t$$

che si traduce nel trovare gli zeri della parabola

$$2t^2 - t - 4 = 0$$

la quale ammette due soluzioni: scartiamo la soluzione negativa. Si ottiene l'incrocio all'istante

$$t^* = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$$

Soluzione -1.49 *Si ha*

$$a(t) = \frac{\beta}{t^3} + 2\alpha\cos(\omega t)$$

L'integrale ci dà la velocità, usando

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

e l'integrale del coseno che è il seno.

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \beta\int t^{-3}dt + 2\alpha\int\cos(\omega t)\,dt$$

$$= -\frac{\beta}{2}\frac{1}{t^2} + 2\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t) + C_1$$

Puoi verificare ciò semplicemente facendo la derivata di $v(t)$ *e confrontandola con l'espressione originale di* $a(t)$. *Per* $t^* = \pi/\omega$

$$v(t^*) = -\frac{\beta}{2}\frac{\omega^2}{\pi^2} + 2\frac{\alpha}{\omega}\underbrace{\sin(\pi)}_{0} + C_1 = v_0$$

Ricaviamo

$$C_1 = v_0 + \frac{\beta}{2}\frac{\omega^2}{\pi^2}$$

Dunque

$$v(t) = -\frac{\beta}{2}\frac{1}{t^2} + 2\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t) + v_0 + \frac{\beta}{2}\frac{\omega^2}{\pi^2}$$

Integriamo ancora per trovare lo spazio

$$x(t) = -\frac{\beta}{2}\int t^{-2}dt + 2\frac{\alpha}{\omega}\int \sin(\omega t) + v_0 + \frac{\beta}{2}\frac{\omega^2}{\pi^2}\int dt$$

$$= \frac{\beta}{2}\frac{1}{t} - 2\frac{\alpha}{\omega^2}\cos(\omega t) + \left(v_0 + \frac{\beta}{2}\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)t + C_2$$

e di nuovo puoi verificare che ciò è vero facendo la derivata e confrontando con $v(t)$. Per

$$t' = \frac{\pi}{2\omega}$$

Abbiamo

$$x(t') = \frac{\beta}{2}\frac{2\omega}{\pi} - 2\frac{\alpha}{\omega^2}\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{0} + \left(v_0 + \frac{\beta}{2}\frac{\omega^2}{\pi^2}\right)\frac{\pi}{2\omega} + C_2 = x_0$$

da cui troviamo

$$C_2 = x_0 - \frac{5\beta\omega}{4\pi} - \frac{v_0\pi}{2\omega}$$

Soluzione -1.50 *La soluzione di*

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + s(t) = 0$$

con $s(t) = 0$ per $t = \pi/2$ è naturalmente $s(t) = \cos(t)$.

Capitolo 0

Sistemi di coordinate

Soluzione 0.1

$$\boldsymbol{c} = (-1, 3) + (0, 4) = (-1, 7)$$

$$\boldsymbol{d} = (-1, 3) - (0, 4) = (-1, -1)$$

Il risultato è mostrato in figura 1.

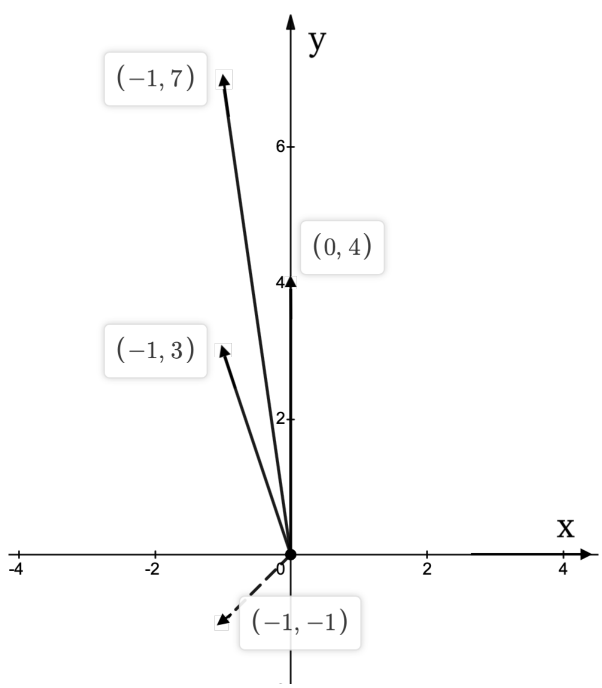

Figura 1: In linea tratteggiata il vettore differenza, in linea continua il vettore somma.

Soluzione 0.2

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (\sqrt{3}, 2) + (-1, \sqrt{3} - 3) = (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1)$$

Il modulo è

$$||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|| = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

Soluzione 0.3 *In notazione con i versori degli assi coordinati*

$$\boldsymbol{a} = (3,\sqrt{3}) = 3\hat{\boldsymbol{x}} + \sqrt{3}\hat{\boldsymbol{y}}$$

L'angolo alla base è dato dalla tangente

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e sappiamo che la tangente ha questo valore in corrispondenza di $30°$ *ovvero* $\theta = \frac{\pi}{6}$. *Quindi siccome*

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Avremo infine la seguente scrittura

$$\boldsymbol{a} = ||\boldsymbol{a}||(\cos\theta,\sin\theta)$$

cioè

$$\boldsymbol{a} = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

E siccome $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ *troviamo*

$$\boldsymbol{a} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) = (3,\sqrt{3})$$

che è il vettore scritto nella notazione originale, dunque abbiamo calcolato tutto correttamente.

Soluzione 0.4 *Il prodotto scalare di* $\boldsymbol{a} = (1,-2)$ *con i seguenti vettori:* $\boldsymbol{b} = (2,1)$ *;* $\boldsymbol{c} = (0,1)$ *;* $\boldsymbol{d} = (-1,1)$ *è*

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (1)(2)+(-2)(1) = 2-2 = 0$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = (1)(0)+(-2)(1) = -2$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} = (1)(-1)+(-2)(1) = -1-2 = -3$$

Soluzione 0.5 *Il prodotto scalare di* $\boldsymbol{a} = (3,-2)$ *con i seguenti vettori:* $\boldsymbol{b} = (1,1)$ *;* $\boldsymbol{c} = (2,0)$ *;* $\boldsymbol{d} = (2,3)$ *è*

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 6$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} = 6 - 6 = 0$$

Essendo $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta$ *si ha*

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{ab} = \frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}}{ac} = \frac{6}{2\sqrt{13}}$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}}{ad} = 0$$

Dunque

$$\theta_{ab} = \arccos\frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{2}} \approx 78.7^\circ$$

$$\theta_{ac} = \arccos\frac{3}{\sqrt{13}} \approx 33.7^\circ$$

$$\theta_{ad} = 90^\circ$$

Soluzione 0.6 *Si ha il prodotto vettoriale tra* $\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$ *e* $\boldsymbol{b} = (-1, 2, 0)$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\boldsymbol{x}} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\boldsymbol{y}} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$= 0\hat{\boldsymbol{x}} + 0\hat{\boldsymbol{y}} + ((1)(2) + (1)(2))\hat{\boldsymbol{z}} = (0, 0, 4)$$

E il prodotto scalare tra $(0, 0, 4)$ *con* $\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$ *e* $\boldsymbol{b} = (-1, 2, 0)$ *è*

$$(0, 0, 4) \cdot (1, 1, 0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$(0, 0, 4) \cdot (-1, 2, 0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Quindi il prodotto vettoriale è perpendicolare ai due vettori originali.

Soluzione 0.7 *Il prodotto vettoriale tra* $\boldsymbol{a} = (1, 2, 1)$ *e* $\boldsymbol{b} = (2, 0, -2)$ *è*

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\boldsymbol{x}} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\boldsymbol{y}} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$= -4\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{y}} - 4\hat{\boldsymbol{z}}$$

Mentre il prodotto scalare è

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2 - 2 = 0$$

quindi

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Quindi siccome

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$$

e

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$
$$||\boldsymbol{b}|| = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Abbiamo

$$||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}|| = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

che corrisponde esattamente a

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|| = ||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}|| \sin\theta$$

con

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\sin\theta = 1$$

Soluzione 0.8 *Dato* $\boldsymbol{r}(t) = (2t, t\cos(t), t^3)$ *la velocità istantanea è*

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (2, \cos(t) - t\sin(t), 3t^2)$$

e l'accelerazione

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = (0, -2\sin(t) - t\cos(t), 6t)$$

avendo modulo

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{a}(t)|| &= \sqrt{0^2 + (2\sin(t) + t\cos(t))^2 + 36t^2} \\ &= \sqrt{4\sin^2 t + t^2\cos^2 t + 2t\sin(2t) + 36t^2} \end{aligned}$$

Soluzione 0.9 *Eravamo arrivati a*

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{2t + 4t^3}{2\sqrt{t^2+t^4}}\hat{\boldsymbol{r}} + r(t)\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Con

$$\theta(t) = \arctan(t)$$

come avevamo visto. Si ha

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

dunque

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{2t + 4t^3}{2\sqrt{t^2+t^4}} + \frac{r(t)}{1+t^2}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Ed inserendo $r(t) = \sqrt{t^2+t^4}$

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{2t + 4t^3}{2\sqrt{t^2+t^4}} + \frac{\sqrt{t^2+t^4}}{1+t^2}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

A confronto, l'espressione in coordinate cartesiane era molto più semplice:

$$\boldsymbol{v}(t) = \hat{\boldsymbol{x}} + 2t\hat{\boldsymbol{y}}$$

Soluzione 0.10 *Dato*

$$\boldsymbol{r}(t) = (2t, 3t^2)$$

la velocità in cartesiane è

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (2, 6t)$$

Per convertire in polari usiamo

$$\boldsymbol{v}(t) = (\dot{r}, r\dot{\theta})$$

dove ora le componenti sono riferite a due versori diversi da quelli di x e y, cioè i versori $\hat{\boldsymbol{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Il modulo di $\boldsymbol{r}(t)$ è

$$r = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$$

e la sua derivata rispetto al tempo

$$\dot{r} = \frac{1}{2\sqrt{4t^2 + 9t^4}} \frac{d}{dt}(4t^2 + 9t^4) = \frac{(4t + 18t^3)}{\sqrt{4t^2 + 9t^4}}$$

L'angolo polare è

$$\theta = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = \arctan\frac{3t}{2}$$

e la sua derivata è

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta} = \frac{d}{dt}\arctan\frac{3t}{2} = \frac{3}{2}\frac{1}{(1 + \frac{9}{4}t^2)} = \frac{6}{4 + 9t^2}$$

Dunque la velocità in componenti polari è

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t) &= \left(\frac{(4t + 18t^3)}{\sqrt{4t^2 + 9t^4}}, \sqrt{4t^2 + 9t^4}\frac{6}{4 + 9t^2}\right) \\ &= \left(\frac{(4t + 18t^3)}{\sqrt{4t^2 + 9t^4}}, \frac{6t}{\sqrt{4 + 9t^2}}\right) \\ &= \left(\frac{(4 + 18t^2)}{\sqrt{4 + 9t^2}}, \frac{6t}{\sqrt{4 + 9t^2}}\right)\end{aligned}$$

Il modulo è

$$||\boldsymbol{v}|| = \frac{1}{\sqrt{4 + 9t^2}}\sqrt{(4 + 18t^2)^2 + 36t^2)} = \frac{2}{\sqrt{4 + 9t^2}}\sqrt{81t^4 + 45t^2 + 4}$$

che possiamo scrivere come

$$81t^4 + 45t^2 + 4 = (36t^2 + 4)(\frac{9}{4}t^2 + 1)$$

Dunque

$$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{4 + 36t^2}$$

che è lo stesso modulo calcolabile in coordinate cartesiane

$$||(2, 6t)|| = \sqrt{4 + 36t^2}$$

dato che il modulo, essendo uno scalare, non dipende dalle coordinate scelte.

Soluzione 0.11 *Si ha* $r(t) = v_0 t$ *e* $\theta(t) = \omega t$, *quindi*

$$\boldsymbol{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta}) = (v_0, r\omega)$$

il modulo è

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + r^2\omega^2} = \sqrt{v_0^2 + v_0^2 t^2 \omega^2} = v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}$$

In coordinate cartesiane

$$x(t) = r\cos\theta \qquad y(t) = r\sin\theta$$

dove $r(t) = v_0 t$ *e* $\theta(t) = \omega t$, *quindi*

$$x(t) = (v_0 t)\cos(\omega t) \qquad y(t) = (v_0 t)\sin(\omega t)$$

La loro derivata è

$$\dot{x}(t) = v_0\cos(\omega t) - v_0\omega t\sin(\omega t) \qquad \dot{y}(t) = v_0\sin(\omega t) + v_0\omega t\cos(\omega t)$$

Quindi la velocità è

$$\boldsymbol{v}(t) = (v_0\cos(\omega t) - v_0\omega t\sin(\omega t), v_0\sin(\omega t) + v_0\omega t\cos(\omega t))$$

la cui espressione è ben più complessa di quella in polari. Il modulo quadro è

$$\begin{aligned} v(t)^2 &= (v_0\cos(\omega t) - v_0\omega t\sin(\omega t))^2 + (v_0\sin(\omega t) + v_0\omega t\cos(\omega t))^2 \\ &= v_0^2[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] + v_0^2 t^2\omega^2[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] \\ &\quad +2v_0^2\omega t\cos(\omega t)\sin(\omega t) - 2v_0^2\omega t\cos(\omega t)\sin(\omega t) \\ &= v_0^2(1 + t^2\omega^2) \end{aligned}$$

quindi

$$v(t) = v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}$$

esattamente come in coordinate polari, ma con il triplo della fatica.
La forma geometrica della traiettoria è a tutti gli effetti una spirale. Eliminando il tempo da $r(t) = v_0 t$ *e* $\theta(t) = \omega t$ *ricaviamo*

$$r(\theta) = \frac{v_0}{\omega}\theta$$

che è proprio l'equazione di una spirale in coordinate polari in geometria, il cui disegno è riportato in figura 2.

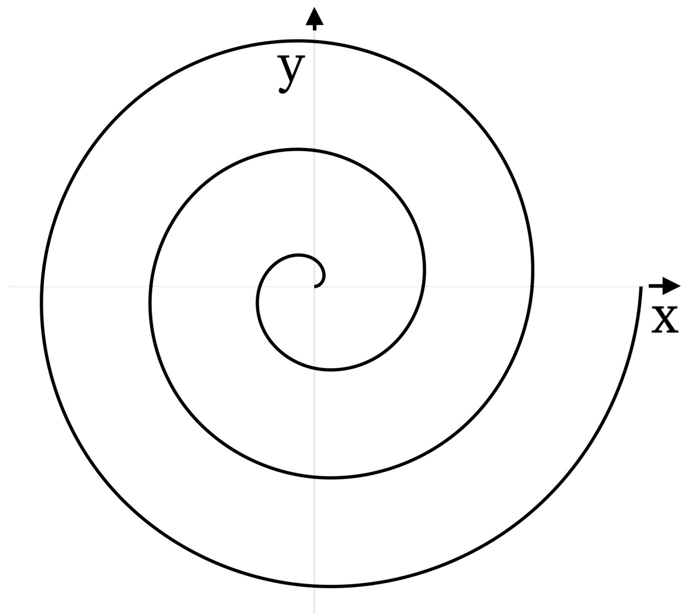

Figura 2: La spirale di Archimede, definita dall'equazione $r(\theta) = (v_0/\omega)\theta$.

Soluzione 0.12 *Partendo da* $\boldsymbol{a} = (3, 1)$ *usiamo la matrice di rotazione*

$$\begin{pmatrix} a^*_x(t) \\ a^*_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

ottenendo, per $\theta = \pi/3$

$$\boldsymbol{a}^* = \begin{pmatrix} a_x\cos\theta + a_y\sin\theta \\ -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Il modulo del vettore in tali coordinate è

$$||\boldsymbol{a}^*|| = \sqrt{(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{40} = \sqrt{10}$$

mentre nel sistema originale

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

Come ci aspettavamo, uno scalare non dipende dal sistema di coordinate.