Capitolo 1

Esercizi supplementari

Esercizio 1.1 *Una particella è mossa da una forza*

$$\boldsymbol{F} = 20\hat{\boldsymbol{x}} - 30\hat{\boldsymbol{y}} + 15\hat{\boldsymbol{z}}$$

dove i valori delle componenti sono espressi in unità di Forza. I vettori posizione iniziale e finale sono

$$\boldsymbol{r}_A = 2\hat{\boldsymbol{x}} - 7\hat{\boldsymbol{y}} - 3\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$\boldsymbol{r}_B = 5\hat{\boldsymbol{x}} - 3\hat{\boldsymbol{y}} - 6\hat{\boldsymbol{z}}$$

calcola il lavoro fatto dalla forza per il trasporto da A a B.

Esercizio 1.2 *La traiettoria di una particella è individuata dal raggio vettore*

$$\boldsymbol{r}(t) = (3t^2 - 2t)\hat{\boldsymbol{x}} + t^3\hat{\boldsymbol{y}} - t^4\hat{\boldsymbol{z}}$$

Se la particella ha massa 4 unità, trova la forza a cui è sottoposta. Quindi calcola il lavoro per portarla dal punto in cui si trova per $t_1 = 1$ al punto in cui $t_2 = 2$.

Esercizio 1.3 *La traiettoria di una particella è individuata dal raggio vettore*

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + b\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$$

dove a, b e ω sono delle costanti. Trova la forza a cui è sottoposta la particella se m è la sua massa. Mostra che la forza è diretta verso il centro delle coordinate, cioè che $\boldsymbol{F} \propto -\boldsymbol{r}$. Cosa ottieni se $\omega^2 \equiv k/m$?

Esercizio 1.4 *Una massa collegata a una molla descrive delle oscillazioni di periodo $T = 2\,s$. Successivamente la massa viene aumentata di $2\,kg$ e conseguentemente il periodo delle oscillazioni aumenta di $1\,s$ rispetto a prima. Ricava il valore della massa iniziale m_0, e dimostra che per fare ciò non è necessario conoscere la costante elastica k della molla.*

Esercizio 1.5 *Supponiamo di star tracciando il moto di una particella subatomica, per il quale abbiamo buoni motivi di credere che sia armonico* $x(t) = A\cos(\omega t)$ *con un' ampiezza* A *incognita e una frequenza* ω *incognita.*
L'unico modo che abbiamo di studiare il suo moto è quello di registrare il suo passaggio in alcuni rivelatori posti in successione nelle posizioni $x = a$, $x = b$ *e* $x = c$.
Si misura che ai tempi $t = t_0$, $t = 2t_0$, $t = 3t_0$ *la particella viene rivelata rispettivamente in* $x = a$, $x = b$ *e* $x = c$.
Con queste informazioni, e usando i teoremi $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$, *dimostra che è possibile ricavare la pulsazione* ω *e quindi la frequenza di oscillazione* $f = \omega/2\pi$ *per la particella, e che tale frequenza è*

$$f = \frac{1}{2\pi t_0} \arccos\left(\frac{c+a}{2b}\right)$$

Esercizio 1.6 *Considera la massa raffigurata in figura 1.1, agganciata a due molle, a loro volta fissate ai loro estremi su blocchi inamovibili. Le due molle hanno diversa*

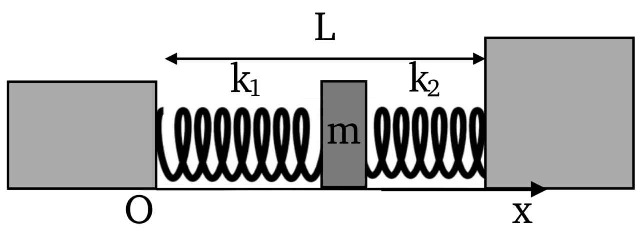

Figura 1.1:

costante elastica k_1 *e* k_2. *La distanza tra gli estremi fissi sia* L, *qual è il periodo delle oscillazioni?*

Esercizio 1.7 *Una particella di massa* 3 *unità, sta seguendo una traiettoria parabolica*

$$\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2)$$

perché è sottoposta a una certa forza. Trova l'espressione di tale forza, poi verifica il teorema dell'energia cinetica considerando il lavoro per portarla dal punto individuato da $t = 0$ *al punto individuato da* $t = 1$.

Esercizio 1.8 *Considera una particella mossa da una forza dipendente dalle coordinate* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$ *e avente componenti*

$$\boldsymbol{F} = (2x - y + z)\hat{\boldsymbol{x}} + (x + y - z^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (3x - 2y + 4z)\hat{\boldsymbol{z}}$$

dove è inteso che $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. *La particella è vincolata a stare su un cerchio di equazione*

$$x^2 + y^2 = 9$$

e si muove di conseguenza solo nel piano (x, y). Definendo il lavoro come

$$W = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

con il vettore $d\boldsymbol{r}$ definito come

$$d\boldsymbol{r} = dx\hat{\boldsymbol{x}} + dy\hat{\boldsymbol{y}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}$$

Verifica che la traiettoria della particella sul cerchio è soddisfatta da

$$x(t) = 3\cos(t) \qquad y(t) = 3\sin(t) \qquad z(t) = 0$$

dove si intende che il periodo di percorrenza del cerchio è pari a $T = 2\pi\,[s]$ e quindi $\sin((2\pi/T)t) \to \sin(t)$ con t misurato in secondi.
Calcola dx, dy e dz per ottenere $d\boldsymbol{r}$. Fatto ciò calcola il prodotto scalare tra $\boldsymbol{F}$ e $d\boldsymbol{r}$ e sostituisci le dipendenze temporali per calcolare il lavoro tra $t = 0$ e $t = 2\pi$.

Esercizio 1.9 *Una massa m è sottoposta a una forza sull'asse z pari a*

$$F(z) = -\frac{\beta^2}{(1 - \alpha z)^2} + \beta^2$$

in cui β e α sono delle costanti che hanno le dimensioni opportune per far sì che $F(z)$ si misuri in Newton. Cioè $[\alpha] = [m]^{-1}$ e $[\beta] = [N]^{1/2}$.
La massa si trova in un punto z tale che $\alpha z \ll 1$. Dimostra, sviluppando $F(z)$ in serie di Taylor attorno a $\alpha z = 0$ fino al secondo ordine in αz, che il moto è quello di un oscillatore armonico e calcola la sua frequenza di oscillazione. Ipotizza $\alpha > 0$. Che succede all'equazione differenziale se $\alpha < 0$? Seni e coseni sono ancora soluzione?

1.1 Soluzioni

Soluzione 1.1 *Siccome la forza è costante nello spazio, il lavoro è semplicemente*

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{s}$$

dove

$$\Delta \boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = (5-2, -3-7, -6+3) = 3\hat{\boldsymbol{x}} - 10\hat{\boldsymbol{y}} - 3\hat{\boldsymbol{z}}$$

Il prodotto scalare restituisce

$$\boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{s} = (20)(3) + (-10)(-30) + (-3)(15) = 315 = W$$

Soluzione 1.2 *Per trovare l'accelerazione deriviamo due volte il vettore posizione, ottenendo*

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = 6\hat{\boldsymbol{x}} + 6t\hat{\boldsymbol{y}} - 12t^2\hat{\boldsymbol{z}} \equiv \boldsymbol{a}(t)$$

la forza a cui è sottoposta è quindi $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{F}(t) = 4(6, 6t, -12t^2) = (24, 24t, -48t^2)$$

La forza non è costante nella traiettoria, quindi il lavoro si calcola come

$$W = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

e possiamo scrivere

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v} \qquad \rightarrow \qquad d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$$

per trasformare tutto in un integrale nel tempo. Si ha

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, dt$$

con $t_1 = 1$ *e* $t_2 = 2$. *La velocità è*

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (6t-2)\hat{\boldsymbol{x}} + 3t^2\hat{\boldsymbol{y}} - 4t^3\hat{\boldsymbol{z}} \equiv \boldsymbol{v}(t)$$

Il prodotto scalare restituisce quindi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} &= (24, 24t, -48t^2) \cdot (6t-2, 3t^2, -4t^3) \\ &= 144t - 48 + 72t^3 + 192t^5 \end{aligned}$$

Quindi il lavoro è

$$W = \int_1^2 (144t - 48 + 72t^3 + 192t^5) dt$$

$$= (72t^2 - 48t + 18t^4 + 32t^6)\Big|_1^2$$
$$= 72(2)^2 - 48(2) + 18(2)^4 + 32(2)^6 - 72 + 48 - 18 - 32$$

Quindi

$$W = 2454$$

dove il risultato è inteso in unità di energia.

Soluzione 1.3 *Partiamo da*

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + b\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$$

Facendo la derivata seconda troviamo l'accelerazione

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -a\omega^2\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} - b\omega^2\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$$

Raccogliamo $-\omega^2$

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \underbrace{(a\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + b\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}})}_{\boldsymbol{r}(t)}$$

Quindi

$$\boldsymbol{F} = -m\omega^2\boldsymbol{r}$$

la forza è diretta verso il centro. Per $\omega^2 \equiv k/m$ *otteniamo*

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$$

cioè la forza elastica in due dimensioni.

Soluzione 1.4 *Il periodo delle oscillazioni per una massa* m_0 *collegata a una molla di costante elastica* k *è dato da*

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}$$

Se incrementiamo la massa passando da m_0 *a* $m_0 + \Delta m$*, il periodo passa da* T_0 *a* $T = T_0 + \Delta T$

$$T_0 + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + \Delta m}{k}}$$

Dividendo questa equazione per quella di partenza, otteniamo

$$1 + \frac{\Delta T}{T_0} = \sqrt{1 + \frac{\Delta m}{m_0}}$$

Elevando al quadrato ricaviamo

$$\frac{\Delta m}{m_0} = \left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right)^2 - 1$$

Con $\Delta T = 1\,s$*,* $T_0 = 2\,s$ *e* $\Delta m = 2\,kg$ *ricaviamo* $m_0 = 1.6\,kg$*.*

Soluzione 1.5 *Dalle informazioni per il moto $x(t) = A\cos(\omega t)$ abbiamo*

$$a = A\cos(\omega t_0)$$

$$b = A\cos(\omega 2t_0)$$

$$c = A\cos(\omega 3t_0)$$

Chiamiamo $\rho \equiv \cos(\omega t_0)$, allora

$$\cos(\omega 2t_0) = \cos^2(\omega t_0) - \sin^2(\omega t_0) = 2\cos^2(\omega t_0) - 1 \equiv 2\rho^2 - 1$$

$$\begin{aligned}\cos(\omega 3t_0) &= \cos(\omega t_0 + 2\omega t_0) = \cos(\omega t_0)\cos(\omega 2t_0) - \sin(\omega t_0)\sin(\omega 2t_0)\\ &= \rho(2\rho^2 - 1) - \underbrace{\sin(\omega t_0)}_{\sqrt{1-\rho^2}}\, 2\underbrace{\sin(\omega t_0)}_{\sqrt{1-\rho^2}}\cos(\omega t_0)\\ &= \rho(2\rho^2 - 1) - 2(1-\rho^2)\rho = \rho(4\rho^2 - 3)\end{aligned}$$

in cui abbiamo usato $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$, oltre a $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.
Abbiamo quindi

$$a = A\rho$$

$$b = A(2\rho^2 - 1)$$

$$c = A\rho(4\rho^2 - 3)$$

Dalla prima ricaviamo $A\rho = a$, dalla seconda ricaviamo

$$b + A = 2A\rho^2$$

sostituendo entrambe nella terza si ottiene

$$c = 2\rho(\underbrace{2A\rho^2}_{b+A}) - 3\underbrace{A\rho}_{a} = 2\rho b + 2\underbrace{\rho A}_{a} - 3a$$

Quindi si ha

$$2b\rho = c + a \qquad \rho = \frac{c+a}{2b}$$

ed essendo $\rho = \cos(\omega t_0)$ ricaviamo la frequenza prendendo la funzione inversa del coseno

$$\omega = \frac{1}{t_0}\arccos\left(\frac{c+a}{2b}\right)$$

e dunque la frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi t_0}\arccos\left(\frac{c+a}{2b}\right)$$

Soluzione 1.6 *Con il metodo vettoriale chiamiamo x lo spostamento della massa verso destra rispetto alla posizione di equilibrio delle due molle. Se una molla si allunga, l'altra deve accorciarsi. In seguito allo spostamento verso destra di una quantità x, la massa è tirata verso sinistra dalla molla k_1 ed è spinta verso sinistra dalla molla k_2. La forza totale sull'asse x è*

$$F_x = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$$

quindi

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

Soluzione 1.7 *La traiettoria parabolica è data da*

$$\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2)$$

La velocità è

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (1, 2t)$$

e quindi l'accelerazione è

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (0, 2)$$

La forza a cui è sottoposta è quindi

$$\boldsymbol{F} = 3(0, 2) = (0, 6)$$

Il lavoro è

$$W = \int \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} dt = \int_0^1 (0, 6) \cdot (1, 2t) dt = 12 \int_0^1 t dt = 6t^2\Big|_0^1 = 6$$

L'energia cinetica a $t = 1$ è, considerando che $v^2 = v_x^2 + v_y^2$

$$T_1 = \frac{1}{2} 3(1 + 4t^2)|_{t=1} = \frac{3}{2} 5$$

mentre l'energia cinetica a $t = 0$ è

$$T_0 = \frac{3}{2}(1 + 4t^2)|_{t=0} = \frac{3}{2}$$

La variazione di energia cinetica è

$$\Delta T = \frac{3}{2}(5 - 1) = 6$$

quindi

$$\Delta T = W$$

Soluzione 1.8 *La forza è data da*

$$\boldsymbol{F} = (2x - y + z)\hat{\boldsymbol{x}} + (x + y - z^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (3x - 2y + 4z)\hat{\boldsymbol{z}}$$

e la traiettoria è un cerchio di raggio 3

$$x^2 + y^2 = 9$$

Nel tempo può essere parametrizzata come $x(t) = 3\cos(t)$ *e* $y(t) = 3\sin(t)$ *come si verifica sostituendo nell'equazione del cerchio (ottieni un'identità). Quindi con* $dx = -3\sin(t)dt$ *e* $dy = 3\cos(t)dt$ *e* $dz = 0$

$$d\boldsymbol{r} = dx\hat{\boldsymbol{x}} + dy\hat{\boldsymbol{y}} = -3\sin(t)dt\hat{\boldsymbol{x}} + 3\cos(t)\hat{\boldsymbol{y}} + 0\hat{\boldsymbol{z}}$$

Il prodotto scalare è

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \{(2x-y+z)\hat{\boldsymbol{x}} + (x+y-z^2)\hat{\boldsymbol{y}} + (3x-2y+4z)\hat{\boldsymbol{z}}\}\cdot\{-3\sin(t)\hat{\boldsymbol{x}} + 3\cos(t)\hat{\boldsymbol{y}} + 0\hat{\boldsymbol{z}}\}$$

$$= -3(2x - y + z)\sin(t) + (x + y - z^2)3\cos(t)$$

A cui ora sostituiamo $z(t) = 0$, $x(t) = 3\cos(t)$ *e* $y(t) = 3\sin(t)$

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -3(6\cos(t) - 3\sin(t))\sin(t) + (3\cos(t) + 3\sin(t))3\cos(t)$$

Il lavoro tra $t = 0$ *e* $t = 2\pi$ *(percorrenza di un giro completo) è quindi, semplificando l'espressione trigonometrica*

$$W = \int_0^{2\pi}(9 - 9\sin(t)\cos(t))dt = 9\int_0^{2\pi} dt - 9\int_0^{2\pi}\sin(t)\cos(t)dt$$

$$= 18\pi - \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2t)dt$$

dove nel secondo termine abbiamo usato l'identità

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

L'integrale del seno è noto sostituendo $s = 2t$

$$\int_0^{4\pi}\sin(s)\frac{ds}{2} = -\frac{1}{2}\cos(s)\Big|_0^{4\pi} = -(1 - 1) = 0$$

Infatti $\cos(4\pi) = \cos(2\pi + 2\pi) = 1$. *Quindi il secondo termine non contribuisce. Il risultato è*

$$W = 18\pi$$

Soluzione 1.9 *Partiamo da*

$$F(z) = -\frac{\beta^2}{(1-\alpha z)^2} + \beta^2$$

Dobbiamo sviluppare

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^2} \equiv (1-\alpha z)^{-2}$$

attorno ad $\alpha z = 0$. *Ovvero corrisponde a sviluppare*

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

con $x \equiv -\alpha z$. *Dunque*

$$(1-\alpha z)^{-2} \approx 1 - 2(-\alpha z) = 1 + 2\alpha z$$

Quindi

$$F(z) \approx -\beta^2(1+2\alpha z) + \beta^2 = -\beta^2 - 2\beta^2\alpha z + \beta^2 = -2\beta^2\alpha z$$

Dunque l'equazione del moto è

$$m\ddot{z} = F(z) = -2\beta^2\alpha$$

Ovvero dividendo per la massa e portando a primo membro

$$\ddot{z} + \frac{2\beta^2\alpha}{m} z = 0$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico avente frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{2\beta^2\alpha}{m}}$$

e la soluzione sono seni e coseni del tipo

$$z(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{2\beta^2\alpha}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{2\beta^2\alpha}{m}}t\right)$$

Tutto ciò è nell'ipotesi $\alpha > 0$. *Se invece* $\alpha < 0$ *l'equazione diventa, con* $\alpha = -|\alpha|$ *e* $|\alpha| > 0$

$$\ddot{z} - \frac{2\beta^2|\alpha|}{m} z = 0$$

Che non è più risolta da seni e coseni, ma da una funzione speciale chiamata "esponenziale": il moto è descritto da una funzione che cresce in maniera esplosiva nel tempo, descrivendo così un sistema instabile.