Capitolo 2

Esercizi supplementari

Esercizio 2.1 *Se l'accelerazione di gravità sulla superficie della Luna è* $1/6$ *di quella terrestre, quanto deve essere lungo un pendolo sulla Luna per avere, in approssimazione di piccole oscillazioni, lo stesso periodo di quello sulla Terra?*

Esercizio 2.2 *Quanto deve essere lungo un pendolo sulla Terra perché possa essere usato come orologio, in modo cioè che ogni mezza oscillazione equivalga a un secondo? Un orologio di questo tipo si dice che "batte il secondo".*

Esercizio 2.3 *Un orologio a pendolo (cioè che batte il secondo) viene spostato dal livello del mare al tetto del Burj-Khalifa (830 metri sul livello del mare). Quanto ritardo accumula l'orologio in un giorno rispetto a prima? Assumi che il raggio terrestre sia pari a* $6400\,km$.

Esercizio 2.4 *Disponendo gli assi cartesiani come in figura 2.1, trova per le direzioni* x^* *e* y^* *l'equazione del moto di una massa sul piano inclinato usando sia il metodo vettoriale, sia il metodo della conservazione dell'energia.*

Esercizio 2.5 *Un massa legata a un pendolo di lunghezza* ℓ *viene lasciata cadere da un angolo* $\theta = \pi/3$ *rispetto alla verticale. Nel punto più basso, viene sganciata dal filo e prosegue per la tangente. Usa la conservazione dell'energia per trovare la velocità orizzontale con cui viene sganciata la massa nel punto più basso, e sapendo che la massa viene lasciata cadere in un dirupo di altezza* h*, calcola a che distanza orizzontale dal punto di sgancio la massa tocca terra. Il problema è illustrato in figura 2.2*

Esercizio 2.6 *Una massa è vincolata a percorrere una guida liscia di forma parabolica*

$$y = ax^2$$

come mostrato in figura 2.3. Quindi il moto è vincolato e da due gradi di libertà pas-

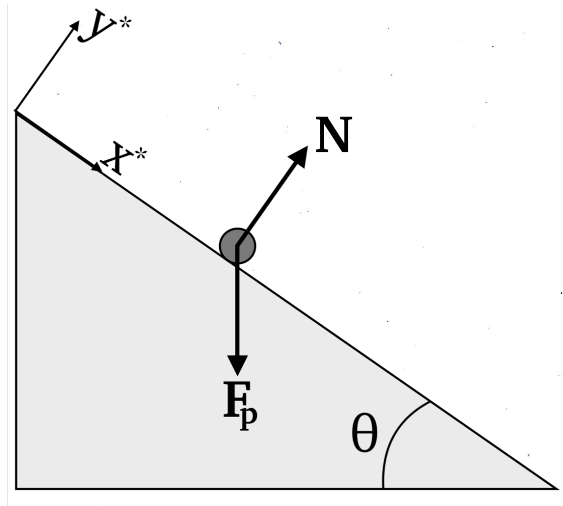

Figura 2.1: Il piano inclinato con le coordinate solidali ad esso.

siamo a uno solo. Scrivere l'espressione dell'energia sotto l'influenza della forza peso. Se alla massa viene data una velocità iniziale v_0 a partire dal vertice della parabola, a che distanza orizzontale dal vertice arriva la massa prima di ricadere verso il basso? Trovare l'equazione del moto sull'asse x usando il metodo dell'energia.

Esercizio 2.7 *Considera un liquido di densità ρ contenuto in un tubo a forma di U e sezione A, come mostrato in figura 2.4. Supponiamo che L sia la lunghezza del tubo bagnata dal liquido, in modo che se A è la sezione, allora il volume di liquido contenuto è $A\,L$, per cui la massa totale è $m = \rho A\,L$.*
Se prendiamo uno stantuffo della stessa sezione del tubo e spingiamo il liquido per una distanza x verso il basso, allora per via dell'incomprimibilità dei liquidi il livello si alzerà di $2x$ nell'altro braccio del tubo, rispetto al livello del liquido compresso nel primo braccio. Se rimuoviamo lo stantuffo il liquido inizierà quindi ad oscillare.
Considera la colonnina di massa $m_* = \rho A\,2x$ dove $A\,2x$ è il volume della colonnina, e considera la forza peso $-m_* g\hat{\boldsymbol{x}}$ a cui è sottoposta. Questa forza accelererà tutto il liquido di massa m, e la forma del tubo ci permette di descrivere questa accelerazione in funzione dello spostamento x con cui abbiamo perturbato il liquido. Scrivi $F = ma$ con $m = \rho A\,L$ e $a = \ddot{x}$ e trova il periodo delle oscillazioni armoniche.

Esercizio 2.8 *Sotto l'influenza della gravità, una massa m è vincolata a stare su una cicloide di equazione*

$$x = a(\phi - \sin\phi) \quad , \quad y = a(1 - \cos\phi)$$

in cui ϕ è la variabile che usiamo per descrivere la cicloide. La situazione è illustrata in figura 2.5. Invece a è la semi-altezza dal pavimento. Prendendo gli assi come in figura ricava la velocità della massa nel punto più basso, se lasciata partire da ferma nel punto O.

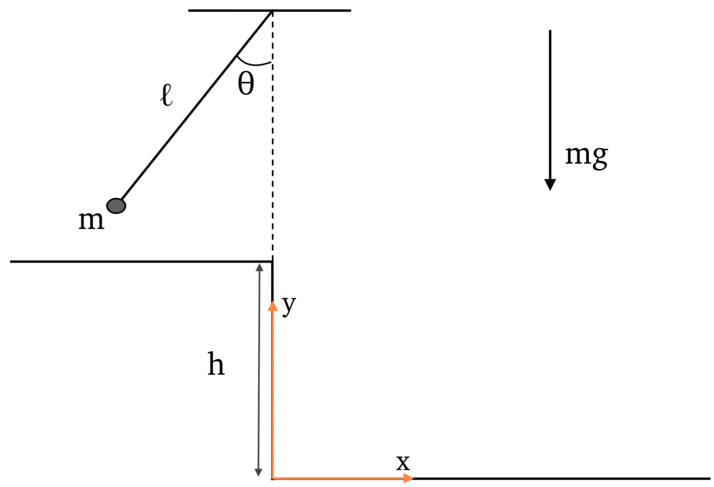

Figura 2.2:

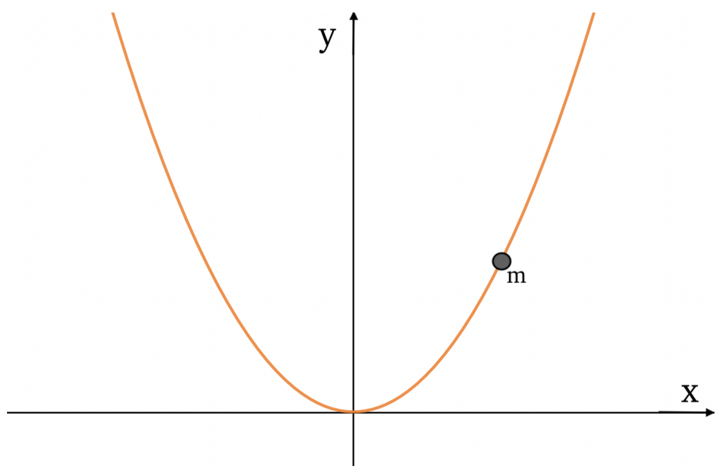

Figura 2.3: Massa vincolata alla guida parabolica.

Scrivi l'energia totale in funzione della variabile ϕ e con il metodo dell'energia trova l'equazione del moto. Mostra che una soluzione semplice può essere trovata se, invece di usare l'equazione del moto, conserviamo l'energia tra una quota generica e il punto O; ricava quindi $\dot{\phi}$ ed infine $\phi(t)$. Fatto ciò, ricava $x(t)$ e $y(t)$ dalle loro definizioni.

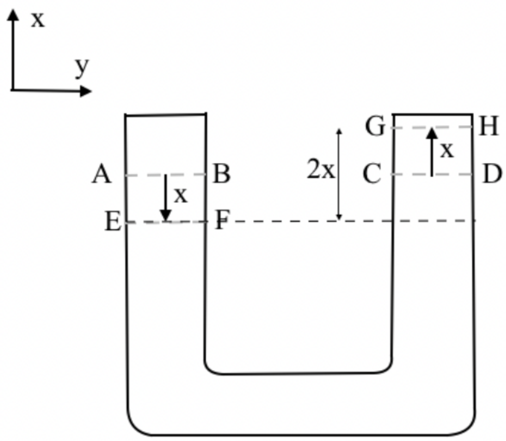

Figura 2.4: Un tubo a U con dentro un liquido. Una fotografia del momento in cui in un braccio abbiamo spinto verso il basso il liquido per una distanza x, e nell'altro braccio, di conseguenza, il livello del liquido è salito di $2x$.

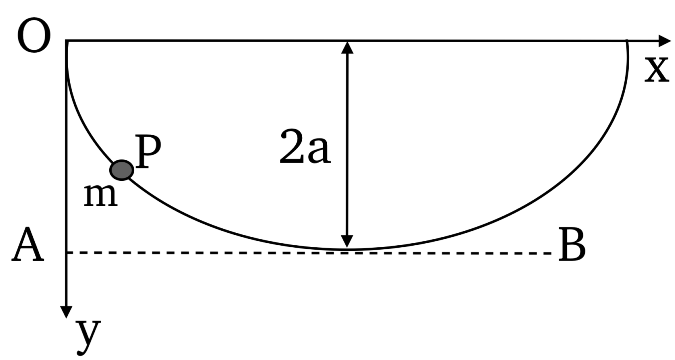

Figura 2.5: Massa vincolata a stare su una cicloide.

2.1 Soluzioni

Soluzione 2.1 *Essendo in approssimazione di piccole oscillazioni intorno all'equilibrio, il periodo è dato da*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Per la Terra e la Luna

$$T_t = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_t}{g_t}} \qquad T_l = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_l}{g_l}}$$

in cui g_t *e* g_l *sono le accelerazioni di gravità sulla Terra e sulla Luna. Il rapporto tra i due periodi è*

$$\frac{T_t}{T_l} = \sqrt{\frac{\ell_t}{g_t}\frac{g_l}{\ell_l}}$$

vogliamo che sia $T_t = T_l$ *e quindi essendo* $T_l/T_t = 1$*, deve essere, elevando al quadrato*

$$\frac{\ell_t}{g_t}\frac{g_l}{\ell_l} = 1$$

Ora $g_l = (1/6)g_t$*, quindi ricaviamo*

$$\ell_l = \frac{1}{6}\ell_t$$

quindi un pendolo sulla Luna per avere lo stesso periodo che sulla Terra deve avere un sesto della lunghezza.

Soluzione 2.2 *Supponendo di essere in regime di piccole oscillazioni, il periodo è dato da*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Mezza oscillazione corrisponde a mezzo periodo, quindi deve essere

$$1 = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = \frac{g}{\pi^2} \approx 1\,metro$$

Sulla luna questo orologio a pendolo dovrebbe essere invece più corto, pari a circa 16 *centimetri per l'esercizio precedente.*

Soluzione 2.3 *Il periodo del pendolo in approssimazione di piccole oscillazioni è dato da*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

in cui la costante di accelerazione gravitazionale a livello del mare è

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

in cui M_T *è la massa della Terra e* $R_T = 6400\,km$ *il raggio terrestre. Se* h *è l'altezza del Burj Khalifa, la costante di accelerazione sul suo tetto sarà*

$$g' = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

La differenza di periodo rispetto al livello del mare è quindi

$$T' - T = 2\pi\sqrt{\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{g'}} - \frac{1}{\sqrt{g}}\right)$$

Essendo $g' < g$, si ha $T' > T$ e quindi l'orologio accumula ritardo a ogni oscillazione. Inserendo le formule per g e g'

$$T' - T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{GM_T}}\left(R_T + h - R_T\right) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{GM_T}}h = 2\pi\sqrt{\frac{\ell R_T^2}{GM_T}}\frac{h}{R_T}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo moltiplicato per $1 = R_T/R_T$ per ottenere tutto in funzione di g essendo $g = GM_T/R_T^2$.
Si ha

$$T' - T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\frac{h}{R_T} \equiv T\frac{h}{R_T}$$

Quindi la differenza percentuale è

$$\frac{T' - T}{T} = \frac{h}{R_T}$$

Essendo $R_T \sim 6400\,km$ e $h \sim 0.83\,km$, l'effetto è dell'ordine di $h/R_T \sim 0.01\%$. Dopo ogni oscillazione completa il pendolo su Burj Khalifa rimane indietro di

$$T' - T = T\frac{h}{R_T}$$

In un giorno ci sono 86400 secondi, che equivalgono a $n_{osc} = 86400/T$ oscillazioni, quindi il ritardo accumulato è

$$(T' - T) \times n_{osc} = (T' - T) \times \frac{86400}{T} = T\frac{h}{R_T}\frac{86400}{T}$$

$$= \frac{h}{R_T}86400 = (1.29 \cdot 10^{-4})(8.64 \cdot 10^{4}) \approx 11.14\,secondi$$

Dopo poco più di 77 giorni, il pendolo rimarrà quindi un intero giorno indietro.

Soluzione 2.4 *Nelle coordinate (x^*, y^*) le forze del diagramma di corpo libero hanno componenti*

$$\boldsymbol{N}^* = (0, N)$$

$$\boldsymbol{F}_p^* = (F_p \sin\theta, -F_p\cos\theta) \equiv mg(\sin\theta, -\cos\theta)$$

Per indovinare le componenti della forza peso basta mettersi nel caso limite: se $\theta = 0$ allora il piano è orizzontale e vogliamo che $\boldsymbol{F}_p$ punti nella direzione delle y^* negative, quindi bisogna usare $\cos\theta$ e il segno deve essere $(-)$. Quindi usiamo la legge di Newton

$$\boldsymbol{F}_p^* + \boldsymbol{N}^* = m\boldsymbol{a}^*$$

Siccome deve essere $a_y^* = 0$ *affinché la massa non si stacchi dal piano inclinato, abbiamo che le componenti* y^* *devono essere tali che*

$$(F_p)_y^* + (N)_y^* = ma_y^* = 0 \qquad \rightarrow \qquad N - mg\cos\theta = 0$$

da cui

$$N = mg\cos\theta$$

La componente x *invece ci dà l'equazione del moto per lo scivolamento*

$$(F_p)_x + (N)_x = ma_x$$

ovvero

$$mg\sin\theta = m\ddot{x}^*$$

ovvero

$$\ddot{x}^* = g\sin\theta$$

da cui, integrando, ricaviamo la legge oraria (supponiamo che la massa parta da ferma sulla sommità $x^* = 0$*)*

$$x(t)^* = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2$$

Usiamo ora il ***metodo dell'energia***

$$E = T + U$$

L'unico movimento è sull'asse x*, quindi*

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Mentre l'energia potenziale è

$$U = mgh$$

dove h *è l'altezza rispetto al suolo. Guardando la figura notiamo che l'altezza può essere ottenuta dal cateto del triangolo rettangolo di ipotenusa* $\ell - x(t)^*$ *(che varia nel tempo man mano che la massa scende), dove* ℓ *è l'ipotenusa totale del piano inclinato.*

$$h = [\ell - x(t)^*]\sin\theta$$

Quindi

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^{*2} + mg[\ell - x(t)^*]\sin\theta$$

Per la conservazione dell'energia

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

e quindi derivando rispetto al tempo

$$m\ddot{x}^*\dot{x}^* - mg\dot{x}^*\sin\theta = 0$$

dividendo tutto per $m\dot{x}^*$

$$\ddot{x}^* = g\sin\theta$$

cioè lo stesso risultato del metodo vettoriale.

Soluzione 2.5 *All'inizio abbiamo solo energia potenziale*

$$U = -mg\ell\cos\theta$$

Nel punto più basso $U = -mg\ell\cos(0) = -mg\ell$ *e la velocità è tutta orizzontale*

$$T = \frac{1}{2}mv_x^2$$

dove x, y *è il sistema di coordinate avente l'asse* y *rivolto verso l'alto e l'asse* x *adiacente al piano orizzontale. Per la conservazione dell'energia*

$$-mg\ell\cos\theta = \frac{1}{2}mv_x^2 - mg\ell$$

da cui ricaviamo

$$v_x = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta)}$$

Da ora in avanti il corpo è libero alla sola forza gravitazionale, quindi le accelerazioni sono, nelle coordinate (x, y) *suddette*

$$\ddot{y} = -g$$

$$\ddot{x} = 0$$

Dato che non c'è forza sull'asse x*. Se scegliamo le coordinate in modo che all'istante* $t = 0$ *sia* $y(0) = h$*, come è più intuitivo fare, e ricordando che* $v_y(0) = 0$ *dato che al momento del rilascio la velocità è tutta orizzontale, ricaviamo integrando due volte* $\ddot{y} = -g$

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Mentre si ha, integrando $\ddot{x} = 0$

$$\dot{x} = costante = v_x = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta)}$$

con θ *fissato a* $\pi/3$ *ovviamente, dato che era l'angolo di rilascio. Quindi sull'asse* x *la legge oraria è quella di un moto rettilineo uniforme (prendiamo l'origine degli assi tale che* $x(0) = 0$*) quindi il punto di sganciamento coincide con* $x = 0$ *e* $y = h$*.*

$$x(t) = v_x t$$

Dunque abbiamo che nel momento in cui la massa tocca terra, cioè

$$y(t_c) = 0 = h - \frac{1}{2}gt_c^2 \qquad \rightarrow \quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

La distanza orizzontale percorsa a tale istante t_c *si ottiene inserendo* t_c *dentro* $x(t)$

$$x(t_c) = v_x t_c = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta)}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{\ell h}\sqrt{1-\cos\theta}$$

L'accelerazione di gravità va via, con nostra sorpresa, e inserendo $\theta = \pi/3$ si ha

$$x(t_c) = \sqrt{2h\ell}$$

Quindi questo esperimento potrebbe essere condotto su pianeti diversi e a parità del prodotto $h\ell$ darebbe lo stesso risultato.

Soluzione 2.6 *L'energia cinetica in coordinate cartesiane è*

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

e l'energia potenziale è

$$U = mgy$$

Per la conservazione dell'energia tra le due situazioni iniziali $T_i = T(v_0)$ e $U_i = 0$, $T_f = 0$, $U_f = U(y_{max})$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgy_{max} \qquad \rightarrow \quad y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

e siccome $y = ax^2$ possiamo scrivere che la distanza orizzontale percorsa è

$$x_{max} = \sqrt{\frac{v_0^2}{2ag}} = \frac{v_0}{\sqrt{2ag}}$$

Troviamo ora l'equazione del moto. L'energia cinetica può essere scritta in funzione di una sola variabile, per via del vincolo.

$$\frac{dy}{dt} = a\frac{d}{dt}x^2 = 2ax\frac{dx}{dt}$$

L'energia cinetica è quindi

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m4a^2x^2\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2ma^2x^2\dot{x}^2$$

L'energia totale è

$$E = \frac{1}{2}m(1 + 4x^2a^2)\dot{x}^2 + mga\,x^2$$

Per la conservazione dell'energia (essendo la guida liscia senza attrito) facciamo la derivata rispetto al tempo

$$0 = \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + 2ma^2(2x\dot{x}\dot{x}^2 + 2x^2\dot{x}\ddot{x}) + 2mga\,x\dot{x}$$

Semplificando un $2m\dot{x}$

$$\frac{1}{2}\ddot{x} + 2a^2(x\dot{x}^2 + x^2\ddot{x}) + ga\,x = 0$$

Che non ha per niente l'aria di essere facile da risolvere.

Soluzione 2.7 *La forza peso della colonnina di liquido sopraelevata di un'altezza* $2x$ *è pari a*

$$\boldsymbol{F}_p = -m_* g \hat{\boldsymbol{x}}$$

dove $m_* \equiv \rho A\, 2x$ *è la massa della colonnina di liquido. Questa forza peso è anche la forza totale agente su tutto il liquido di massa* $m = \rho A\, L$*, quindi scriviamo la legge di Newton* $F = ma$ *nella direzione verticale come*

$$m\ddot{x} = \boldsymbol{F}_p = -\rho A\, 2x\, g$$

ed essendo $m = \rho A\, L$ *dove* L *è la lunghezza totale del tubo bagnata dal liquido, abbiamo*

$$\rho A\, L\ddot{x} = -\rho A\, 2x\, g$$

notiamo che la densità del liquido ρ *si semplifica, così come la sezione del tubo* A*. Rimaniamo con l'equazione di un oscillatore armonico*

$$\ddot{x} + \frac{2g}{L}x = 0$$

la quale ammette una soluzione oscillante di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

che è lo stesso periodo di un pendolo avente lunghezza $\ell = L/2$*.*

Soluzione 2.8 *Date*

$$x = a(\phi - \sin\phi) \quad , \quad y = a(1 - \cos\phi)$$

Le componenti cartesiane della velocità si ottengono derivando rispetto al tempo

$$\dot{x} = a(\dot{\phi} - \cos\phi\dot{\phi}) \quad , \quad \dot{y} = a\sin\phi\dot{\phi}$$

Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}ma^2[\dot{\phi}^2 + \cos^2\phi\dot{\phi}^2 - 2\dot{\phi}^2\cos\phi + \sin^2\phi\dot{\phi}^2]$$

$$= \frac{1}{2}ma^2[2\dot{\phi}^2 - 2\dot{\phi}^2\cos\phi] = ma^2(1 - \cos\phi)\dot{\phi}^2$$

Con le coordinate che abbiamo scelto (l'asse y *è rivolto verso il basso), allora l'altezza dal terreno corrisponde a* $2a - y$*, quindi l'energia potenziale è*

$$U = mg(2a - y)$$

Nel punto O si ha $y = 0$ quindi se la massa è lasciata partire da ferma

$$0 + mg2a = E$$

e siccome l'energia si conserva, nel punto più basso $y = 2a$ e quindi $U = 0$ per cui

$$mg2a = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui ricaviamo

$$v = \sqrt{2g(2a)} = 2\sqrt{ga}$$

L'energia potenziale può essere scritta in funzione di ϕ sostituendo $y = a(1 - \cos\phi)$

$$U = mg(2a - y) = mg(2a - a(1 - \cos\phi)) = mga(1 + \cos\phi)$$

Quindi l'energia totale è, ricordando che $y = a(1 - \cos\phi)$

$$E = ma^2(1 - \cos\phi)\dot{\phi}^2 + mga(1 + \cos\phi)$$

Facendo la derivata rispetto al tempo e dividendo per ma

$$0 = a\frac{d}{dt}(1 - \cos\phi)\dot{\phi}^2 + g\frac{d}{dt}(1 + \cos\phi)$$

Si ha, calcolando la derivata del prodotto tra $(1 - \cos\phi)$ e $\dot{\phi}^2$

$$\frac{d}{dt}(1 - \cos\phi)\dot{\phi}^2 = \sin\phi\dot{\phi}\dot{\phi}^2 + (1 - \cos\phi)2\dot{\phi}\ddot{\phi}$$

Quindi, dividendo per $\dot{\phi}$ otteniamo l'equazione differenziale per ϕ

$$a\sin\phi\dot{\phi}^2 + 2a(1 - \cos\phi)\ddot{\phi} - g\sin\phi = 0$$

Che non sappiamo risolvere. Invece consideriamo l'energia posseduta da m nel punto O, che è tutta potenziale

$$E = U = mg2a$$

Conservando ad una quota generica

$$E = ma^2(1 - \cos\phi)\dot{\phi}^2 + mga(1 + \cos\phi) = mg2a$$

Semplificando ma e isolando $\dot{\phi}$

$$a(1 - \cos\phi)\dot{\phi}^2 = g(1 - \cos\phi)$$

Possiamo semplificare, per nostra fortuna, $(1 - \cos\phi)$, dunque

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{a} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

La quale è facilmente integrabile per dare

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{g}{a}}t + c_1$$

Verifichiamo infatti che questa è una soluzione dell'equazione differenziale

$$a \sin\phi\dot{\phi}^2 + 2a(1 - \cos\phi)\ddot{\phi} - g\sin\phi = 0$$

basta sostituire, si ottiene identità!
Dalle definizioni di x e y (poniamo $c_1 = 0$ per semplicità)

$$x(t) = a\left[\sqrt{\frac{g}{a}}t - \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right)\right] \quad , \quad y(t) = a\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right)\right]$$

La condizione $c_1 = 0$ si traduce quindi nel problema in cui per $t = 0$ si ha $y(0) = 0$ e $x(0) = 0$, cioè proprio la massa che parte da O.