

Capitolo -1

Analisi matematica

Soluzione -1.1 Si ha

$$\begin{aligned}\frac{x^4 x^{2/3} a^{4/5}}{\sqrt[3]{x^5} \sqrt[4]{a^3 x^2}} &\equiv \frac{x^4 x^{2/3} a^{4/5}}{x^{5/3} a^{3/4} x^{2/4}} = x^4 x^{2/3} x^{-5/3} x^{-1/2} a^{4/5} a^{-3/4} \\ &= x^{4+2/3-5/3-1/2} a^{4/5-3/4} = x^{5/2} a^{1/20} = \sqrt{x^5} a^{1/20}\end{aligned}$$

Soluzione -1.2

$$\frac{4x+2}{x} + 3 = \frac{1}{x} - 12$$

Per $x = 0$ si ottiene un risultato assurdo $\infty = \infty$, quindi non è soluzione. Possiamo dunque moltiplicare tutto per $x \neq 0$

$$4x + 2 + 3x = 1 - 12x$$

da cui

$$19x = -1 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{19}$$

Soluzione -1.3 I punti sono $(4, 5)$ e $(7, -4)$ dunque

$$d = \sqrt{(4-7)^2 + (5-(-4))^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

Soluzione -1.4 Si ha $3x + 1 = 4 - 5x$, dunque

$$3x + 5x = 4 - 1 = 3 \quad \rightarrow \quad 8x = 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{8}$$

Il punto di incontro ha coordinata $x = 3/8$ e per trovare la coordinata y sostituiamo in qualsiasi delle due rette. Ad esempio

$$y = 3\frac{3}{8} + 1 = \frac{17}{8}$$

il punto $(3/8, 17/8)$ è ciò che si vede in figura 1.

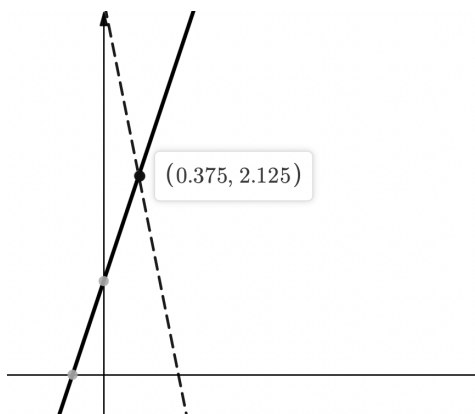


Figura 1: Grafico di $y = 3x + 1$ e $y = 4 - 5x$. Il punto di incontro è in $x = 3/8$, come si vede.

Soluzione -1.5 Portandoci nella forma $y = ax + b$ abbiamo

$$y = -x + 1 \quad y = \frac{1}{7}x + \frac{3}{7} \quad y = -7x + 4$$

quindi per le tre rette abbiamo $a = -1$, $a = 1/7$, $a = -7$. Si può ottenere anche prendendo due punti qualunque (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e facendo la differenza tra i valori per ciascuna retta.

Soluzione -1.6 Vogliamo che valga l'uguaglianza

$$ax + 2 = 2 - 3x$$

nel punto $x = 2$.

Sostituendo e semplificando deve essere

$$a(2) + 2 = 2 - 3(2) \quad \rightarrow \quad a = -3$$

cioè le due rette devono coincidere sempre $-3x + 2 = -3x + 2$ per ogni x .

Infatti proviamo a risolvere l'equazione per x qualunque portando tutto ciò che riguarda x al membro di sinistra:

$$(a + 3)x = 2 - 2 = 0$$

questa ha due soluzioni possibili, o è $(a - 3) = 0$, oppure è $x = 0$.

Siccome le rette hanno lo stesso coefficiente angolare $+2$ (che è il punto in cui incontrano l'asse y , cioè il punto in cui $x = 0$), l'unico modo che hanno per incontrarsi anche nel punto $x = 2$ è quello di essere una uguale all'altra, cioè di coincidere sempre. Stiamo cioè dicendo che l'unico modo di avere $(a + 3)x = 0$ per $x = 2$ è proprio che sia $a = -3$, dal momento che $2 \neq 0$.

Se invece avessimo avuto $y_1 = ax + 5$ e $y_2 = 2 - 3x$, per avere intersezione nel punto $x = 2$, cioè

$$a(2) + 5 = 2 - 3(2)$$

avremmo dovuto avere un'inclinazione

$$a = -\frac{9}{2}$$

cioè la retta sarebbe dovuta essere

$$y_1 = -\frac{9}{2}x + 2$$

puoi verificare graficamente sul sito <https://www.desmos.com/calculator?lang=it> scrivendo le due rette y_1 e $y_2 = 2 - 3x$.

Soluzione -1.7 Vediamo se $f(x) = x + 2$ rispetta la condizione di linearità

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Si ha

$$f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + 2$$

e

$$f(x_1) + f(x_2) = [x_1 + 2] + [x_2 + 2] = (x_1 + x_2) + 4$$

quindi

$$f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$$

e la funzione $f(x)$ non può essere lineare. Tuttavia è una retta, quindi è lineare nel senso che il suo grafico è una linea. In realtà le funzioni $f(x) = ax + b$ si chiamano funzioni affini. Le funzioni affini diventano lineari quando $b = 0$.

Soluzione -1.8 Per spostare il vertice da $(0, 0)$ a $(3, -2)$ si può procedere traslando rigidamente il disegno della parabola $y = x^2$. Anzitutto la centriamo sul punto $x = 3$ con la seguente trasformazione

$$x^2 \rightarrow (x - 3)^2$$

poi trasciniamo verticalmente tutto il disegno verso il basso di -2 unità. Il risultato è

$$y = (x - 3)^2 - 2$$

che ha vertice in $(3, -2)$.

Soluzione -1.9 Per $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$ deve essere $x \geq 0$ e $x \neq 2$. Per $f(x) = \frac{1}{3x-5} + \frac{1}{x}$ deve essere $3x - 5 \neq 0$ e $x \neq 0$, dunque il dominio è tutta la retta reale, tranne i due punti $x \neq 5/3$ e $x \neq 0$. Per $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ deve essere $4 - x > 0$ ma non uguale a zero perché sta a denominatore. Quindi la funzione esiste per $x < 4$ e non è compreso il punto $x = 4$.

Soluzione -1.10 Usando la formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si trova che $y = 3x^2 + 2x - 1$ incontra $y = 0$ per $x = -1$ e $x = 1/3$. Invece per $y = -x^2 + 2x + 3$ si ha zero per $x = -1$ e $x = 3$. Per $y = x^2 - 6$ si ha zero per $x = \pm\sqrt{6}$. Per $y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ si ha un unico zero ovviamente per $x = 2$. Per $y = 2x^2 + 3x + 2$ non si hanno zeri. Questo perché $b^2 - 4ac < 0$. La parabola, come puoi verificare, sta graficamente ben sopra l'asse x .

Soluzione -1.11 Deve essere $3x^2 + 2 = -2x + 3$, ovvero $3x^2 + 2x - 1 = 0$ che possiamo risolvere con

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si ha l'incontro in due punti: per $x = -1$ e $x = 1/3$. Le coordinate y di questi punti sono $y = -2(-1) + 3 = 5$ e $y = -2/3 + 3 = 7/3$. Ciò si verifica graficamente.

Soluzione -1.12 Si ha

$$c_1 = \ell \sin \alpha \quad c_2 = \ell \cos \alpha$$

con $\alpha = 60^\circ$ e $\ell = \sqrt{3}$

$$c_1 = \sqrt{3} \sin(60^\circ) = \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$c_2 = \sqrt{3} \cos(60^\circ) = \sqrt{3} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Soluzione -1.13 Partendo da

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

con $\alpha = \beta$ si ha

$$\sin(2\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$$

ovvero

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

E partendo da

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

con $\alpha = \beta$ si ha

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

che può essere scritto diversamente usando $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

oppure

$$\cos(2\alpha) = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Soluzione -1.14 *Dalla formula*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

con $\alpha = 45^\circ$ e $\beta = 60^\circ$ si ricava

$$\begin{aligned} \sin(105^\circ) &= \sin(45^\circ) \cos(60^\circ) + \sin(60^\circ) \cos(45^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Soluzione -1.15 *Si ha*

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

Se sommiamo membro a membro queste due espressioni

$$\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos(a) \cos(b)$$

quindi otteniamo

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

Se invece le sottraiamo

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin(a) \sin(b)$$

otteniamo, come richiesto

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

Soluzione -1.16 *Dalle definizioni*

$$\tan(30^\circ) = \frac{\sin(30^\circ)}{\cos(30^\circ)} = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(60^\circ) = \frac{\sin(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

$$\tan(75^\circ) = \frac{\sin(75^\circ)}{\cos(75^\circ)} = \frac{\sin(45^\circ + 30^\circ)}{\cos(45^\circ + 30^\circ)}$$

E

$$\begin{aligned} \sin(45^\circ + 30^\circ) &= \sin(45^\circ) \cos(30^\circ) + \sin(30^\circ) \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Quindi

$$\cos(45^\circ + 30^\circ) = \sqrt{1 - \sin^2(45^\circ + 30^\circ)} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \tan(75^\circ) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{4 - 3}} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{3}) \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 (2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(1 + 3 + 2\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Soluzione -1.17 Dalla definizione

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

Anzitutto raccogliamo $\cos \alpha$ a numeratore e denominatore e semplifichiamo

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha \cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \tan \alpha \sin \beta}$$

Raccogliamo ora $\cos \beta$ a numeratore e denominatore, semplifichiamo e giungiamo a

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Soluzione -1.18 Si ha

$$30^\circ \rightarrow \rightarrow \pi \frac{30}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$60^\circ \rightarrow \rightarrow \pi \frac{60}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$45^\circ \rightarrow \rightarrow \pi \frac{45}{180} = \frac{\pi}{4}$$

$$120^\circ \rightarrow \rightarrow \pi \frac{120}{180} = \frac{2}{3}\pi$$

$$150^\circ \rightarrow \rightarrow \pi \frac{150}{180} = \frac{5}{6}\pi$$

Soluzione -1.19 *Gli zeri di*

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

si avranno per valori dell'argomento

$$\frac{2\pi}{T}x = n\pi$$

ovvero per

$$x = n\frac{T}{2}$$

cioè multipli interi del semi-periodo.

Soluzione -1.20

$$\frac{20}{4 + 30 \cos^2(\tan(2x^\gamma))} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1})$$

Separiamo i due membri

$$\frac{20}{4 + 30 \cos^2(\tan(2x^\gamma))} = \cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $4 + 30 \cos^2(\tan(2x^\gamma))$ dato che tale termine non si annulla mai, essendo una somma di quantità positive. Poi dividiamo entrambi i membri per $\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}$ dato che anche tale termine non si annulla mai, essendo somma di quantità positive.

$$4 + 30 \cos^2(\tan(2x^\gamma)) = \frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Isoliamo la funzione di x

$$30 \cos^2(\tan(2x^\gamma)) = \frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}} - 4$$

Siccome il secondo membro è sempre positivo, prendiamo la radice quadrata

$$\cos(\tan(2x^\gamma)) = \pm \frac{1}{\sqrt{30}} \sqrt{\frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}} - 4}$$

Prendiamo ora l'arco-coseno di entrambi i membri¹

$$\tan(2x^\gamma) = \arccos\left(\pm \frac{1}{\sqrt{30}} \sqrt{\frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}} - 4}\right)$$

¹L'argomento del membro di destra è sicuramente minore di 1, dunque è possibile calcolare l'arcoseno.

E quindi applichiamo l'arcotangente a entrambi i membri

$$2x^\gamma = \arctan \left\{ \arccos \left(\pm \frac{1}{\sqrt{30}} \sqrt{\frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}}} - 4 \right) \right\}$$

Non ci resta che elevare tutto per $1/\gamma$.

$$x = \frac{1}{2^{1/\gamma}} \arctan^{1/\gamma} \left\{ \arccos \left(\pm \frac{1}{\sqrt{30}} \sqrt{\frac{20}{\cos^2(\sqrt{4\beta^2 + 1}) + \frac{1}{\sqrt{3}}}} - 4 \right) \right\}$$

Soluzione -1.21 È sufficiente mandare x e y in

$$x \rightarrow x - 3 \quad y \rightarrow y - 2$$

Quindi

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

è l'equazione del cerchio con centro in $(3, 2)$. Puoi verificarlo calcolando il grafico su <https://www.desmos.com/calculator?lang=it>.

Soluzione -1.22 Vi appartiene solo il punto $(\sqrt{3}, 2)$ essendo

$$(\sqrt{3})^2 + (2)^2 = 3 + 4 = 7$$

Soluzione -1.23 Appartengono a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

solo i punti $(1, \pm 3/2)$.

Soluzione -1.24 Usando la regola

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = 48x^3 + 4x ; f'(x) = \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x}} ; f'(x) = -\frac{1}{5} \frac{1}{x^{6/5}} ; f'(x) = -\frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} ; f'(x) = 2t^4x ; f'(x) = \frac{5}{x^6}$$

Soluzione -1.25 Da $f(x) = 5x^{-4/3}$ si ha

$$\frac{df}{dx} = -\frac{20}{3} x^{-7/3} = f'(x)$$

Nel punto $x = 1$ il coefficiente angolare della retta tangente è quindi

$$m = f'(1) = -\frac{20}{3} (1)^{-7/3} = -\frac{20}{3}$$

Soluzione -1.26 Partendo da $s(t) = 4t^5 + t^2 + 3$ si ha

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 20t^4 + 2t$$

Soluzione -1.27 Dobbiamo calcolare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

Sfruttiamo

$$\begin{aligned} \cos(x+h) &= \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

Il primo limite si calcola sfruttando quanto visto nel testo

$$\cos(h) = \sqrt{1 - \sin^2 h} \approx \sqrt{1 - h^2}$$

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\sqrt{1-h^2} - 1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\sqrt{1-h^2} - 1)\sqrt{1-h^2} + 1}{h\sqrt{1-h^2} + 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(-h^2)}{h(\sqrt{1-h^2} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(-h)}{2} = 0 \end{aligned}$$

Mentre il secondo limite è ormai semplice per noi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)h}{h} = \sin(x)$$

Dunque

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} = -\sin(x)$$

Soluzione -1.28 Dobbiamo calcolare la derivata di

$$y = \arctan(x)$$

Facciamo la funzione inversa in entrambi i membri

$$\tan(y) = \tan(\arctan(x)) = x$$

Derivando rispetto a y , trattandola quindi come variabile indipendente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \tan(y) = \frac{1}{\cos^2 y}$$

Quindi capovolgendo l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$$

E dalla definizione abbiamo

$$x = \tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 y}}{\cos(y)}$$

Facendo il quadrato

$$x^2 = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y}$$

ricaviamo $\cos^2 y$ da questa equazione per trovare

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}$$

dunque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

che è la derivata di $\arctan(x)$.

Soluzione -1.29

$$f'(x) = \frac{3 \sin^2(\sqrt{2x}) \cos(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{3}{4} \sqrt{1 + \cos(x)} - \frac{3x \sin(x)}{8\sqrt{1 + \cos(x)}}$$

$$f'(x) = -\frac{3 \sin(x) \cos^2(x)}{\sqrt{1 - \cos^6 x}}$$

$$f'(x) = -\frac{2[-\sin(x) + x \cos(x) + 1]}{(\sin(x) - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{4x(1+x)}{\tan(x^2)}}{2\sqrt{1 + x \sin(x^2)}}$$

Soluzione -1.30 Abbiamo $y = 2x^2 - 3x + 12$. La sua derivata è

$$y' = 4x - 3$$

che si annulla in corrispondenza di

$$4x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{4}$$

il quale è evidentemente un punto di minimo assoluto, dato che $y' < 0$ per $x < 3/4$ e $y' > 0$ per $x > 3/4$. La coordinata y di tale punto è

$$y\left(\frac{3}{4}\right) = 2\frac{9}{16} - 3\frac{3}{4} + 12 = \frac{18}{16} - \frac{9}{4} + 12 = \frac{87}{8}$$

Quindi il vertice di $y = 2x^2 - 3x + 12$ è nel punto

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{87}{8}\right)$$

Soluzione -1.31 Dobbiamo calcolare il massimo della funzione

$$v(t) = 12\frac{20t + 1}{20t^2 + 4}$$

La derivata è, trascurando la costante moltiplicativa 12

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\frac{d}{dt}(20t + 1)(20t^2 + 4) - (20t + 1)\frac{d}{dt}(20t^2 + 4)}{(20t^2 + 4)^2} \\ &= \frac{20(20t^2 + 4) - 40(20t + 1)t}{(20t^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

Ponendo questa derivata uguale a zero (e quindi considerando solo il numeratore) ci ritroviamo con

$$10t^2 + t - 2 = 0$$

della quale prendiamo solo la soluzione positiva $t = 2/5$. Questo è un punto di massimo in quanto la derivata è negativa per $t > 2/5$ e positiva per $t < 2/5$. La velocità massima si trova sostituendo nella funzione originale

$$v\left(\frac{2}{5}\right) = 12\frac{20\frac{2}{5} + 1}{20\frac{4}{25} + 4} = 12\frac{\frac{9}{5}}{\frac{16}{5} + 4} = 12\frac{15}{12} = 15$$

Soluzione -1.32

$$f''(x) = 2\cos(3x - 2 + x^2) - (2x + 3)^2 \sin(3x - 2 + x^2)$$

$$f''(x) = 36x^2 + \frac{4}{(x - 2)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6(\cos(x) + 3)^3}{(3x + \sin(x))^4} - \frac{6\sin(x)(\cos(x) + 3)}{(3x + \sin(x))^3} + \frac{\cos(x)}{(3x + \sin(x))^2}$$

Soluzione -1.33 Date $f(t) = \sin(\omega t)$ e $f(t) = \cos(\omega t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \sin(\omega t) \right) = \frac{d}{dt} (\omega \cos(\omega t)) = -\omega^2 \sin(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \cos(\omega t) \right) = -\frac{d}{dt} (\omega \sin(\omega t)) = -\omega^2 \cos(\omega t)$$

In entrambi i casi

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f$$

Che può essere scritta come

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0$$

che in fisica è nota come equazione dell'oscillatore armonico.

Soluzione -1.34 Data $f(x, y) = 3 \sin(x^2 y) + xy + \frac{1}{y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy \cos(x^2 y) + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 \cos(x^2 y) + x - \frac{2}{y^3}$$

Soluzione -1.35 Data $f(x, y, z) = 3x^2 + z \sin(y) + z$; con $x(t) = \sqrt{t}$; $y(t) = t^2$; $z = 2 \sin(t) + 4t$ si ha la derivata totale rispetto al tempo

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= 6x \frac{dx}{dt} + z \cos(y) \frac{dy}{dt} + (\sin(y) + 1) \frac{dz}{dt} \\ &= 6(\sqrt{t}) \frac{1}{2\sqrt{t}} + (2 \sin(t) + 4t) \cos(t^2)(2t) + (\sin(t^2) + 1)(2 \cos(t) + 4) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\frac{df}{dt} = 3 + 4t(\sin(t) + 2t) \cos(t^2) + 2(\sin(t^2) + 1)(\cos(t) + 2)$$

Soluzione -1.36 Data $v(t) = 2t^2 + 3 \sin(t)$ l'accelerazione è, per definizione,

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 4t + 3 \cos(t)$$

Mentre lo spazio percorso si ottiene integrando la velocità nel tempo

$$x(t) = \int [2t^2 + 3 \sin(t)] dt = 2 \int t^2 dt + 3 \int \sin(t) dt = \frac{2}{3} t^3 - 3 \cos(t) + C$$

Soluzione -1.37 L'area è

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int (3x^3 + x^4 - x) dx = \left. \frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{9}{20}$$

Soluzione -1.38

$$\int (5x + 1)^5 dx$$

Poniamo $5x + 1 = u$, quindi facendo il differenziale $5 dx = du$ ovvero $dx = \frac{1}{5} du$

$$\frac{1}{5} \int (u)^5 du = \frac{1}{5} \frac{1}{6} u^6 + C = \frac{1}{30} (5x + 1)^6 + C$$

Consideriamo ora

$$\int \sqrt{4x + 2} dx$$

Proviamo $4x + 2 = u$, quindi $dx = \frac{1}{4} du$ e

$$\int \frac{1}{4} \sqrt{u} du \equiv \frac{1}{4} \int u^{1/2} du = \frac{1}{6} u^{3/2} + C = \frac{1}{6} (4x + 2)^{3/2} + C$$

Consideriamo ora

$$\int \cos(2x + 1) dx$$

Poniamo $2x + 1 = u$, quindi $dx = \frac{1}{2} du$, dunque

$$\frac{1}{2} \int \cos(u) du = \frac{1}{2} \sin(u) + C = \frac{1}{2} \sin(2x + 1) + C$$

Soluzione -1.39

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos^5(x)} dx$$

proviamo a porre $u = \cos(x)$. Si ha, facendo il differenziale

$$du = -\sin(x) dx$$

dunque

$$dx = \frac{1}{-\sin(x)} du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(x)}{u^5} \frac{1}{-\sin(x)} du &= - \int u^{-5} du \\ &= \frac{1}{4} u^{-4} + C = \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^4(x)} + C \end{aligned}$$

Soluzione -1.40

$$\int x \underbrace{\cos x}_{g'(x)} dx = x \sin x - \int (1) \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 \underbrace{\sin x}_{g'(x)} dx &= x^2(-\cos x) - \int (2x)(-\cos x) dx \\
&= -x^2(\cos x) + 2 \underbrace{\int x \cos x dx}_{\text{Già calcolato}} \\
&= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C \\
\int_0^{\pi/4} x \underbrace{\sin(2x)}_{g'(x)} dx &= x \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (1) \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} [x \cos(2x)] \Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Soluzione -1.41 Usando l'integrazione per parti

$$\int_0^{2\pi} \cos(x) \cos(x) dx = \cos(x) \sin(x) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\sin(x)) \sin(x) dx$$

E siccome

$$\cos(x) \sin(x) \Big|_0^{2\pi} = \cos(2\pi) \sin(2\pi) - \cos(0) \sin(0) = 0 - 0 = 0$$

abbiamo proprio

$$\int_0^{2\pi} \cos(x) \cos(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin(x) \sin(x) dx$$

ovvero

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$$

come volevamo dimostrare.

Soluzione -1.42 Essendo

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx \equiv A$$

la somma dei due integrali è

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) dx = 2A$$

usando l'identità fondamentale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

abbiamo

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) dx = \int_0^{2\pi} (1) dx = 2\pi$$

quindi

$$2A = 2\pi \quad \rightarrow A = \pi$$

dunque

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi$$

Soluzione -1.43 Partendo da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} \equiv (1-x)^{-1/5}$$

Abbiamo, usando

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{5} + \frac{3}{25}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

Soluzione -1.44

$$a(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \gamma t^2}}$$

Raccogliamo β^2 a denominatore perché vogliamo avere $\sqrt{\gamma}t/\beta \ll 1$

$$a(t) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{\gamma}t}{\beta}\right)^2}}$$

Ponendo

$$x \equiv \left(\frac{\sqrt{\gamma}t}{\beta}\right)^2$$

ci siamo ricondotti alla forma

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

con $n = -1/2$. Dunque

$$a(t) \approx \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\gamma}t}{\beta}\right)^2\right) + \mathcal{O}(t^4) = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta^2}t^2\right) + \mathcal{O}(t^4)$$

Soluzione -1.45 Si ha $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!}$.
Per $f(x) = \sin(x)$ chiaramente $f(0) = 0$. Poi

$$f'(x) = \cos(x) \quad \rightarrow \quad f'(0) = 1$$

E $f''(x) = -\sin(x)$ motivo per cui

$$f''(0) = -\sin(0) = 0$$

Poi si ha

$$f'''(x) = -\frac{d}{dx} \sin(x) = -\cos(x)$$

e quindi

$$f'''(0) = -\cos(0) = -1$$

per cui

$$\begin{aligned} \sin(x) &\approx 0 + (1)x + (0)\frac{x^2}{2!} + (-1)\frac{x^3}{3!} \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

Soluzione -1.46 Partiamo da

$$\frac{dy}{dx} + 2x^2 - \sin x = 2$$

Separiamo dy e dx

$$dy = (2 + \sin x - 2x^2)dx$$

Quindi integriamo ambo i lati

$$y(x) = \int (2 + \sin x - 2x^2) dx = 2x - \cos x - \frac{2}{3}x^3 + C$$

quindi la soluzione è

$$y(x) = 2x - \cos x - \frac{2}{3}x^3 + C$$

con C costante arbitraria, puoi verificare sostituendo.

Soluzione -1.47 Partiamo da

$$2\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2} = 1$$

Separiamo dy e dx

$$2dy = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Ovvero, integrando

$$2y(x) = x + \frac{1}{x} + c_1$$

ovvero, chiamando $C \equiv c_1/2$

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} + C$$

Soluzione -1.48 Partiamo da

$$v_1(t) = 2t + 3$$

$$v_2(t) = 6t + 2$$

Integrando

$$s_1(t) = t^2 + 3t + c_1$$

$$s_2(t) = 3t^2 + 2t + c_2$$

e usando le condizioni iniziali $s_1(0) = 4$, $s_2(0) = 0$ troviamo $c_1 = 4$ e $c_2 = 0$. L'incrocio avviene per $s_1(t) = s_2(t)$ ovvero

$$t^2 + 3t + 4 = 3t^2 + 2t$$

che si traduce nel trovare gli zeri della parabola

$$2t^2 - t - 4 = 0$$

la quale ammette due soluzioni: scartiamo la soluzione negativa. Si ottiene l'incrocio all'istante

$$t^* = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$$

Soluzione -1.49 Si ha

$$a(t) = \frac{\beta}{t^3} + 2\alpha \cos(\omega t)$$

L'integrale ci dà la velocità, usando

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

e l'integrale del coseno che è il seno.

$$\begin{aligned} v(t) &= \int a(t) dt = \beta \int t^{-3} dt + 2\alpha \int \cos(\omega t) dt \\ &= -\frac{\beta}{2} \frac{1}{t^2} + 2\frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) + C_1 \end{aligned}$$

Puoi verificare ciò semplicemente facendo la derivata di $v(t)$ e confrontandola con l'espressione originale di $a(t)$. Per $t^* = \pi/\omega$

$$v(t^*) = -\frac{\beta \omega^2}{2 \pi^2} + 2\frac{\alpha}{\omega} \underbrace{\sin(\pi)}_0 + C_1 = v_0$$

Ricaviamo

$$C_1 = v_0 + \frac{\beta \omega^2}{2 \pi^2}$$

Dunque

$$v(t) = -\frac{\beta}{2} \frac{1}{t^2} + 2\frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) + v_0 + \frac{\beta \omega^2}{2 \pi^2}$$

Integriamo ancora per trovare lo spazio

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{\beta}{2} \int t^{-2} dt + 2\frac{\alpha}{\omega} \int \sin(\omega t) + v_0 + \frac{\beta \omega^2}{2 \pi^2} \int dt \\ &= \frac{\beta}{2} \frac{1}{t} - 2\frac{\alpha}{\omega^2} \cos(\omega t) + \left(v_0 + \frac{\beta \omega^2}{2 \pi^2} \right) t + C_2 \end{aligned}$$

e di nuovo puoi verificare che ciò è vero facendo la derivata e confrontando con $v(t)$.

Per

$$t' = \frac{\pi}{2\omega}$$

Abbiamo

$$x(t') = \frac{\beta}{2} \frac{2\omega}{\pi} - 2\frac{\alpha}{\omega^2} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 + \left(v_0 + \frac{\beta \omega^2}{2 \pi^2} \right) \frac{\pi}{2\omega} + C_2 = x_0$$

da cui troviamo

$$C_2 = x_0 - \frac{5\beta\omega}{4\pi} - \frac{v_0\pi}{2\omega}$$

Soluzione -1.50 La soluzione di

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + s(t) = 0$$

con $s(t) = 0$ per $t = \pi/2$ è naturalmente $s(t) = \cos(t)$.

Capitolo 0

Sistemi di coordinate

Soluzione 0.1

$$\mathbf{c} = (-1, 3) + (0, 4) = (-1, 7)$$

$$\mathbf{d} = (-1, 3) - (0, 4) = (-1, -1)$$

Il risultato è mostrato in figura 1.

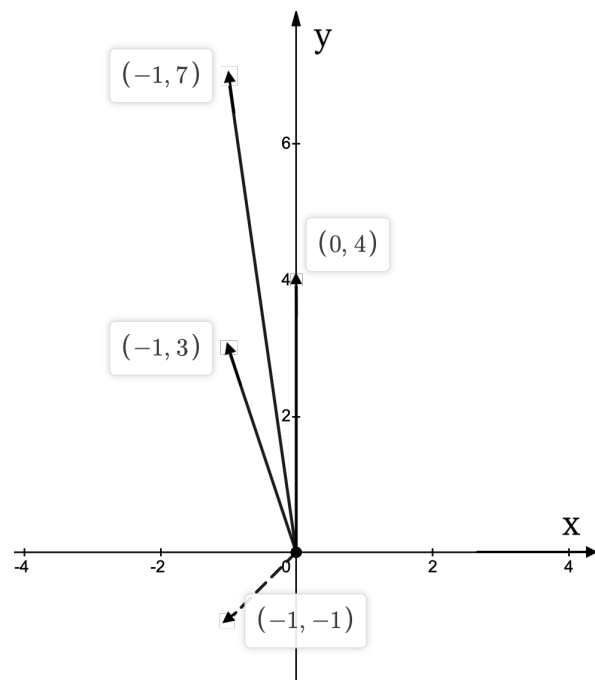


Figura 1: In linea tratteggiata il vettore differenza, in linea continua il vettore somma.

Soluzione 0.2

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\sqrt{3}, 2) + (-1, \sqrt{3} - 3) = (\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1)$$

Il modulo è

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Soluzione 0.3 In notazione con i versori degli assi coordinati

$$\mathbf{a} = (3, \sqrt{3}) = 3\hat{x} + \sqrt{3}\hat{y}$$

L'angolo alla base è dato dalla tangente

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e sappiamo che la tangente ha questo valore in corrispondenza di 30° ovvero $\theta = \frac{\pi}{6}$.
Quindi siccome

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Avremo infine la seguente scrittura

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|(\cos \theta, \sin \theta)$$

cioè

$$\mathbf{a} = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

E siccome $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ troviamo

$$\mathbf{a} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = (3, \sqrt{3})$$

che è il vettore scritto nella notazione originale, dunque abbiamo calcolato tutto correttamente.

Soluzione 0.4 Il prodotto scalare di $\mathbf{a} = (1, -2)$ con i seguenti vettori: $\mathbf{b} = (2, 1)$; $\mathbf{c} = (0, 1)$; $\mathbf{d} = (-1, 1)$ è

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(2) + (-2)(1) = 2 - 2 = 0$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (1)(0) + (-2)(1) = -2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = (1)(-1) + (-2)(1) = -1 - 2 = -3$$

Soluzione 0.5 Il prodotto scalare di $\mathbf{a} = (3, -2)$ con i seguenti vettori: $\mathbf{b} = (1, 1)$; $\mathbf{c} = (2, 0)$; $\mathbf{d} = (2, 3)$ è

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 6$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = 6 - 6 = 0$$

Essendo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta$ si ha

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{ac} = \frac{6}{2\sqrt{13}}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}}{ad} = 0$$

Dunque

$$\theta_{ab} = \arccos \frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{2}} \approx 78.7^\circ$$

$$\theta_{ac} = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 33.7^\circ$$

$$\theta_{ad} = 90^\circ$$

Soluzione 0.6 Si ha il prodotto vettoriale tra $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (-1, 2, 0)$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{\mathbf{x}} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{\mathbf{y}} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{\mathbf{z}} \\ &= 0 \hat{\mathbf{x}} + 0 \hat{\mathbf{y}} + ((1)(2) + (1)(2)) \hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 4) \end{aligned}$$

E il prodotto scalare tra $(0, 0, 4)$ con $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (-1, 2, 0)$ è

$$(0, 0, 4) \cdot (1, 1, 0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$(0, 0, 4) \cdot (-1, 2, 0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Quindi il prodotto vettoriale è perpendicolare ai due vettori originali.

Soluzione 0.7 Il prodotto vettoriale tra $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ e $\mathbf{b} = (2, 0, -2)$ è

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{\mathbf{x}} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{\mathbf{y}} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{\mathbf{z}} \\ &= -4 \hat{\mathbf{x}} + 4 \hat{\mathbf{y}} - 4 \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Mentre il prodotto scalare è

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 - 2 = 0$$

quindi

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Quindi siccome

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$$

e

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\| &= \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \\ \|\mathbf{b}\| &= \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Abbiamo

$$\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

che corrisponde esattamente a

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$$

con

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\sin \theta = 1$$

Soluzione 0.8 Dato $\mathbf{r}(t) = (2t, t \cos(t), t^3)$ la velocità istantanea è

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (2, \cos(t) - t \sin(t), 3t^2)$$

e l'accelerazione

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (0, -2 \sin(t) - t \cos(t), 6t)$$

avendo modulo

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}(t)\| &= \sqrt{0^2 + (2 \sin(t) + t \cos(t))^2 + 36t^2} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 2t \sin(2t) + 36t^2}\end{aligned}$$

Soluzione 0.9 Eravamo arrivati a

$$\mathbf{v}(t) = \frac{2t + 4t^3}{2\sqrt{t^2 + t^4}} \hat{\mathbf{r}} + r(t) \frac{d\theta}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Con

$$\theta(t) = \arctan(t)$$

come avevamo visto. Si ha

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

dunque

$$\mathbf{v}(t) = \frac{2t + 4t^3}{2\sqrt{t^2 + t^4}} + \frac{r(t)}{1+t^2} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Ed inserendo $r(t) = \sqrt{t^2 + t^4}$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{2t + 4t^3}{2\sqrt{t^2 + t^4}} + \frac{\sqrt{t^2 + t^4}}{1+t^2} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

A confronto, l'espressione in coordinate cartesiane era molto più semplice:

$$\mathbf{v}(t) = \hat{\mathbf{x}} + 2t\hat{\mathbf{y}}$$

Soluzione 0.10 Dato

$$\mathbf{r}(t) = (2t, 3t^2)$$

la velocità in cartesiane è

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (2, 6t)$$

Per convertire in polari usiamo

$$\mathbf{v}(t) = (\dot{r}, r\dot{\theta})$$

dove ora le componenti sono riferite a due versori diversi da quelli di x e y , cioè i versori $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Il modulo di $\mathbf{r}(t)$ è

$$r = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$$

e la sua derivata rispetto al tempo

$$\dot{r} = \frac{1}{2\sqrt{4t^2 + 9t^4}} \frac{d}{dt}(4t^2 + 9t^4) = \frac{(4t + 18t^3)}{\sqrt{4t^2 + 9t^4}}$$

L'angolo polare è

$$\theta = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = \arctan \frac{3t}{2}$$

e la sua derivata è

$$\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta} = \frac{d}{dt} \arctan \frac{3t}{2} = \frac{3}{2} \frac{1}{(1 + \frac{9}{4}t^2)} = \frac{6}{4 + 9t^2}$$

Dunque la velocità in componenti polari è

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \left(\frac{(4t + 18t^3)}{\sqrt{4t^2 + 9t^4}}, \sqrt{4t^2 + 9t^4} \frac{6}{4 + 9t^2} \right) \\ &= \left(\frac{(4t + 18t^3)}{\sqrt{4t^2 + 9t^4}}, \frac{6t}{\sqrt{4 + 9t^2}} \right) \\ &= \left(\frac{(4 + 18t^2)}{\sqrt{4 + 9t^2}}, \frac{6t}{\sqrt{4 + 9t^2}} \right) \end{aligned}$$

Il modulo è

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\sqrt{4 + 9t^2}} \sqrt{(4 + 18t^2)^2 + 36t^2} = \frac{2}{\sqrt{4 + 9t^2}} \sqrt{81t^4 + 45t^2 + 4}$$

che possiamo scrivere come

$$81t^4 + 45t^2 + 4 = (36t^2 + 4)\left(\frac{9}{4}t^2 + 1\right)$$

Dunque

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 36t^2}$$

che è lo stesso modulo calcolabile in coordinate cartesiane

$$\|(2, 6t)\| = \sqrt{4 + 36t^2}$$

dato che il modulo, essendo uno scalare, non dipende dalle coordinate scelte.

Soluzione 0.11 Si ha $r(t) = v_0 t$ e $\theta(t) = \omega t$, quindi

$$\mathbf{v} = (\dot{r}, r\dot{\theta}) = (v_0, r\omega)$$

il modulo è

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + r^2\omega^2} = \sqrt{v_0^2 + v_0^2 t^2 \omega^2} = v_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

In coordinate cartesiane

$$x(t) = r \cos \theta \quad y(t) = r \sin \theta$$

dove $r(t) = v_0 t$ e $\theta(t) = \omega t$, quindi

$$x(t) = (v_0 t) \cos(\omega t) \quad y(t) = (v_0 t) \sin(\omega t)$$

La loro derivata è

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos(\omega t) - v_0 \omega t \sin(\omega t) \quad \dot{y}(t) = v_0 \sin(\omega t) + v_0 \omega t \cos(\omega t)$$

Quindi la velocità è

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos(\omega t) - v_0 \omega t \sin(\omega t), v_0 \sin(\omega t) + v_0 \omega t \cos(\omega t))$$

la cui espressione è ben più complessa di quella in polari. Il modulo quadro è

$$\begin{aligned} v(t)^2 &= (v_0 \cos(\omega t) - v_0 \omega t \sin(\omega t))^2 + (v_0 \sin(\omega t) + v_0 \omega t \cos(\omega t))^2 \\ &= v_0^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] + v_0^2 t^2 \omega^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] \\ &\quad + 2v_0^2 \omega t \cos(\omega t) \sin(\omega t) - 2v_0^2 \omega t \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ &= v_0^2 (1 + t^2 \omega^2) \end{aligned}$$

quindi

$$v(t) = v_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

esattamente come in coordinate polari, ma con il triplo della fatica.

La forma geometrica della traiettoria è a tutti gli effetti una spirale. Eliminando il tempo da $r(t) = v_0 t$ e $\theta(t) = \omega t$ ricaviamo

$$r(\theta) = \frac{v_0}{\omega} \theta$$

che è proprio l'equazione di una spirale in coordinate polari in geometria, il cui disegno è riportato in figura 2.

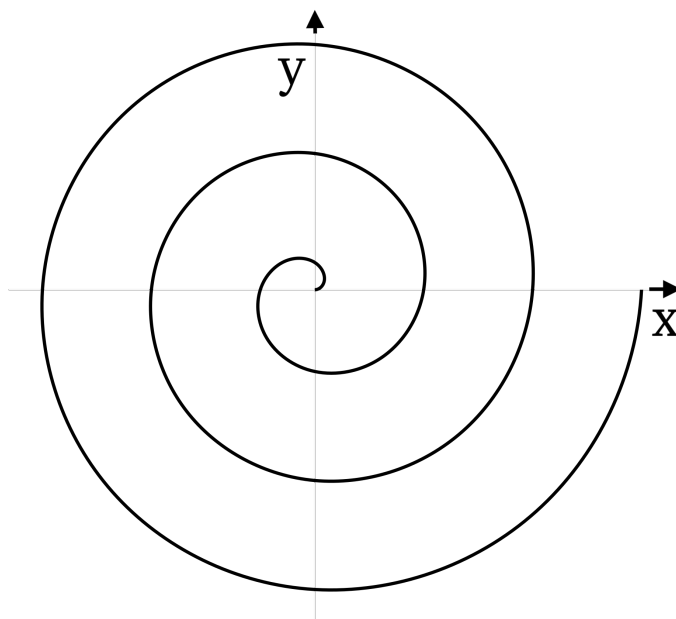


Figura 2: La spirale di Archimede, definita dall'equazione $r(\theta) = (v_0/\omega)\theta$.

Soluzione 0.12 Partendo da $\mathbf{a} = (3, 1)$ usiamo la matrice di rotazione

$$\begin{pmatrix} a_x^*(t) \\ a_y^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

ottenendo, per $\theta = \pi/3$

$$\mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} a_x \cos \theta + a_y \sin \theta \\ -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Il modulo del vettore in tali coordinate è

$$\|\mathbf{a}^*\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{40} = \sqrt{10}$$

mentre nel sistema originale

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

Come ci aspettavamo, uno scalare non dipende dal sistema di coordinate.