

Capitolo 1

L'oscillatore armonico

1.1 La dinamica

La legge più importante della meccanica classica è la celebre *seconda legge della dinamica* di Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

in cui $\mathbf{F}$ è la forza totale applicata su un corpo di massa m , e $\mathbf{a}$ la sua accelerazione. Un modo più illuminante di scriverla è il seguente

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (1.1)$$

perché fa capire che se studiamo la dinamica all'interno di un sistema inerziale, un corpo accelera *se e solo se* gli viene applicata una forza totale $\mathbf{F}$, ed accelera tanto meno quanto più è grande la sua massa m . La forza totale è intesa come $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$ ovvero la somma vettoriale di tutte le forze applicate sul corpo. Se $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ cioè se la forza totale è nulla, la (1.1) ci dice che $\mathbf{a} = 0$ ovvero

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \text{costante},$$

cioè in un sistema inerziale un corpo soggetto a una forza totale nulla (o non soggetto a forze) si muove di moto rettilineo

uniforme. Ciò significa che se iniziamo il nostro esperimento al tempo convenzionale $t = 0$ il corpo rimane fermo se già era fermo, e non cambia la sua velocità se già si muoveva con una certa velocità.

In sintesi la domanda principale della meccanica classica può essere riassunta così: data una qualsiasi forma delle forze $\mathbf{F}$, sai calcolare la traiettoria $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ che seguirà il corpo a ogni istante successivo? La risposta a questa domanda è data da

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

dato che integrando due volte questa equazione differenziale, possiamo determinare $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Infatti la cosa più importante da capire della (1.1) è che si tratta di un'equazione vettoriale, cioè sono in realtà tre equazioni, ciascuna delle quali eguaglia una delle tre componenti di $\mathbf{a}$ con quella di $\mathbf{F}$, e ci ricorda che le componenti del vettore $\mathbf{F}$ sono abbattute di un fattore $1/m$. Per intenderci, scegliamo un sistema di assi cartesiani (x, y, z) e scriviamo per esplicito la (1.1)

$$a_x = \frac{F_x}{m} \quad (1.2a)$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} \quad (1.2b)$$

$$a_z = \frac{F_z}{m} \quad (1.2c)$$

E ora un esempio concreto: supponiamo $\mathbf{F} = (F, 0, 0)$ cioè imprimiamo al corpo una forza solo lungo l'asse x , per cui

$$F_x = F \quad ; \quad F_y = 0 \quad ; \quad F_z = 0.$$

Dalla (1.1) otteniamo

$$a_x = F/m \quad ; \quad a_y = 0 \quad ; \quad a_z = 0,$$

per cui il corpo si muoverà di moto rettilineo uniforme lungo gli assi y e z se già era in moto al tempo $t = 0$, ed

accelererà lungo l'asse x . Oppure se già era fermo a $t = 0$, si sposterà accelerando solo sull'asse x . La traiettoria del corpo a ogni tempo t si otterrà allora integrando l'accelerazione. Se F è costante nel tempo otterremo, integrando due volte in t :

$$x(t) = x(0) + v_x(0)t + \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2.$$

$$y(t) = y(0) + v_y(0)t.$$

$$z(t) = z(0) + v_z(0)t.$$

Nel nostro esempio abbiamo supposto $F = \text{costante}$, tuttavia è di grande interesse il caso in cui F varia con la distanza percorsa dal corpo, ad esempio $F = F(x)$ se consideriamo solo il moto sull'asse x . Se ciò è vero, dobbiamo tenere conto del fatto che x dipende implicitamente dal tempo t .

Il caso più intuitivo è quello di una massa collegata a una molla: è noto a tutti che quando si tira una molla la resistenza esercitata da essa aumenta tanto più la tiriamo. Non ci sorprende quindi che se attacchiamo un estremo della molla nell'origine $x = y = z = 0$ allora la forza deve essere proporzionale a $x(t)$ dove $x(t)$ è la posizione della massa m a ogni istante. Il fatto che sentiamo resistenza se tiriamo la molla in un verso si traduce in un segno negativo nella $F(x)$. Per semplicità possiamo quindi porre

$$F(x) = -kx,$$

dove k è una costante introdotta per far tornare le dimensioni¹. Disegniamo il diagramma di corpo libero per questo problema. Sulla massa agiscono, se proprio vogliamo essere esaurienti, tre forze: la forza peso, la reazione del pavimento,

¹Dall'analisi dimensionale deve essere, per qualche costante k , $F = kx = ma$ ovvero

$$[k][L] = [M][L][T^{-2}],$$

e quindi

$$[k] = \frac{1}{[L]} M [L] [T^{-2}],$$

ovvero in unità S.I. $[k] = N/m$.

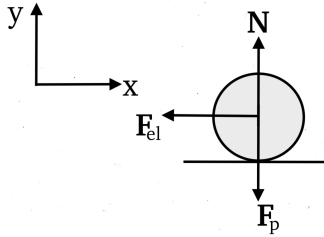


Figura 1.1: Diagramma di corpo libero per una massa sul pavimento, sottoposta alla forza peso e alla forza elastica di una molla.

e la forza elastica. La forza totale è quindi

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{el}(x).$$

Rispetto al sistema di assi coordinati rappresentato in figura 1.1 le forze in gioco hanno espressioni

$$\mathbf{F}_p = (0, -F_p) \quad , \quad \mathbf{N} = (0, N).$$

$$\mathbf{F}_{el}(x) = (-kx, 0).$$

Siccome la massa non si stacca da terra, richiediamo che rispetto alle coordinate (x, y) si abbia $a_y = 0$, cioè non ci deve essere accelerazione in direzione verticale. Ciò, vettorialmente significa

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \end{pmatrix},$$

e siccome

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -kx \\ N - F_p \end{pmatrix},$$

allora deve essere $F_y = 0$ e quindi $N = F_p$ per avere identità con $a_y = 0$: come già sapevamo, la reazione del pavimento bilancia la forza peso. Ciò che ci interessa davvero è quello che succede sull'asse x dove agisce la molla.

L'equazione del moto sull'asse x diventa $a_x = F_x/m = -(k/m)x$

cioè scrivendo² $a_x \equiv \ddot{x}$

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0}, \quad (1.3)$$

dove abbiamo chiamato

$$\omega^2 \equiv k/m,$$

in quanto ha le dimensioni del quadrato di una frequenza, come si vede dall'analisi dimensionale. La (1.3) è una delle

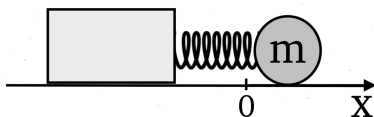


Figura 1.2: Una massa m collegata a una molla, a sua volta fissata a un estremo immobile. Il centro dell'oscillazione è individuato in $x = 0$, la posizione di riposo della molla.

equazioni sovrane della fisica: è l'equazione dell'*oscillatore armonico*. La sua importanza risiede nel fatto che *in prima approssimazione* moltissimi sistemi fisici possono essere trattati come degli oscillatori armonici, dunque sarà meglio studiarla per bene.

Anzitutto notiamo che si tratta di un'*equazione differenziale*, e in quanto tale ci pone la seguente domanda “sai trovare quella funzione $x(t)$ tale che se sommi la sua derivata seconda con il prodotto tra se stessa e una costante ω^2 ottieni zero”? Se hai bisogno di più confidenza con il concetto di equazione differenziale, corri subito al capitolo di Analisi Matematica per una rinfrescata.

Come ci suggerisce l'esperienza, se colleghiamo una massa a una molla, la tiriamo e poi la lasciamo andare, questa

²Ricordiamo che con il punto indichiamo la derivazione rispetto al tempo:

$$\frac{ds}{dt} \equiv \dot{s} \quad , \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}.$$

inizierà ad oscillare. Un'oscillazione completa viene contata ogni volta che la massa ritorna al punto di partenza (il punto in cui l'avevamo lasciata libera, ad esempio), e il tempo impiegato per compiere questa oscillazione è detto *periodo dell'oscillazione* T . L'inverso del periodo $1/T$ è detto *frequenza dell'oscillazione*. Uno potrebbe fidarsi dell'esperienza quotidiana e dare per scontato che la (1.3) descrive un'oscillazione di frequenza $\omega = \sqrt{k/m}$, tuttavia siamo qui proprio per sviscerare questa affermazione.

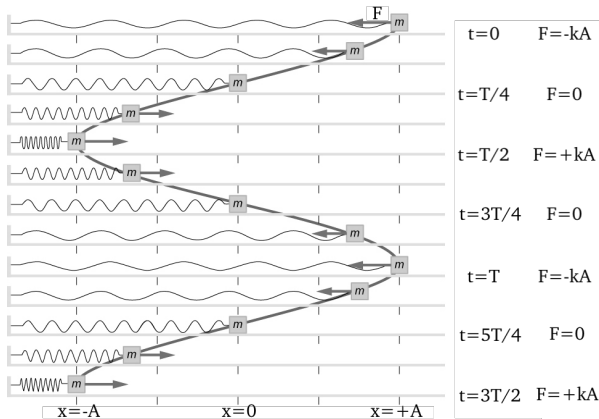


Figura 1.3: Lo spostamento nel tempo di una massa collegata alla molla si traduce in un'oscillazione descritta dalle funzioni seno o coseno. In questo caso la massa è lasciata libera a partire da una posizione $x(0) = +A$. Notare come la forza percepita dalla massa, essendo funzione dello spazio $F = -kx(t)$ (dipende da quanto è tesa la molla in ogni istante di tempo), varia passando da un minimo $-kA$ a un massimo $+kA$.

Immagine tratta da: William Moebs, Samuel J. Ling, and Jeff Sanny, opentextbc.ca

Possiamo infatti interpretare la (1.3) come se fosse un'identità che una qualche soluzione $x(t)$ deve soddisfare, tradotto a parole: la somma della derivata seconda di $x(t)$ con il prodotto tra se stessa e il termine ω^2 deve fare zero. Le uniche funzioni oscillanti che conosciamo per ora sono seni e coseni, e anche alle loro oscillazioni associamo una frequenza ω , ad esempio in una scrittura come $\sin(\omega t)$. Con tutti questi indizi non è difficile concludere che la soluzione che cerchiamo debba essere qualcosa come $x(t) = x_o \sin(\omega t)$, dove x_o serve per dare le dimensioni di una lunghezza. Proviamo a

calcolare la derivata seconda di questa funzione

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x_0 \sin(\omega t) \right) = x_0 \omega \frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t).$$

Notiamo ora che l'ultimo membro possiamo riscriverlo come $-\omega^2 x(t)$, quindi abbiamo

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t),$$

cioè esattamente la (1.3). È ora cruciale notare che anche $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ è soluzione, basta calcolarne la derivata seconda e si ottiene lo stesso risultato.

Esercizio 1.1 Verifica che $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ soddisfa anche lei l'equazione dell'oscillatore armonico $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

Potresti giustamente chiederti: ma allora quale delle due è davvero la soluzione? La risposta è molto profonda: dipende da quale problema stai risolvendo. La (1.3) ha infatti la pretesa di restituirci la traiettoria *esatta* $x(t)$ seguita dalla massa sotto l'influenza della forza elastica: concorderai con me che a parità di massa e molla, la forma delle oscillazioni cambierà a seconda di come facciamo partire l'oscillazione: ad esempio possiamo ottenere oscillazioni più o meno ampie a seconda di quanto tiriamo la molla prima di lasciarla andare, possiamo lasciar partire la massa da ferma o darle una leggera spinta al momento del rilascio, o addirittura non tendere la molla e dare un colpetto iniziale alla massa nell'origine.

1.2 Il principio di sovrapposizione

La bellezza della (1.3) è che ci lascia la libertà di risolvere tutti questi problemi diversi con una singola equazione, il problema specifico viene poi selezionato specificando le *condizioni iniziali*, cioè posizione iniziale e velocità iniziale. Ad esempio

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t),$$

è soluzione di (1.3), come abbiamo verificato, ma *non è soluzione dello specifico problema* “la massa viene rilasciata da

ferma al tempo $t = 0$ nella posizione x_0 ", infatti dovrebbe essere a parole $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$, mentre troviamo $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = x_0\omega$. Per questo problema specifico è facile verificare che la soluzione invece è

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t).$$

Esercizio 1.2 Verifica che $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ è una soluzione che descrive il problema "la massa viene rilasciata da ferma al tempo $t = 0$ nella posizione x_0 ". Cioè deve essere $\dot{x}(0) = 0$ e $x(0) = x_0$.

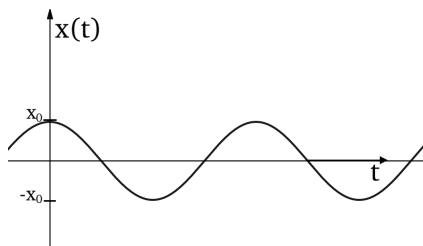


Figura 1.4: Massa che parte da una posizione x_0 a $t = 0$. Il grafico dello spostamento è quello di un coseno.

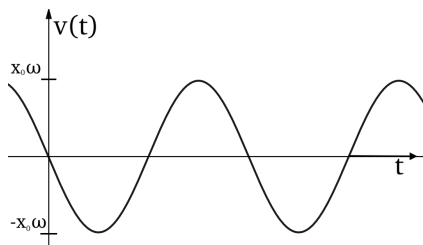


Figura 1.5: Massa che parte da ferma da una posizione x_0 a $t = 0$. Il grafico della velocità è quello di un seno invertito, cioè $\frac{d}{dt} \cos(\omega t)$. Notare che la velocità è negativa nei primi istanti: la massa parte da ferma in $x = x_0$ e poi torna indietro per la forza di richiamo della molla.

La soluzione col seno invece risolve un altro problema: "la massa viene fatta partire dall'origine con una velocità

$x_0\omega$ lungo x al tempo $t = 0$ ". A costo di essere ripetitivi, è importante enfatizzare che le soluzioni di problemi specifici diversi sono comunque tutte soluzioni della stessa (1.3). Possiamo spingerci ancora oltre e azzardare che se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ risolvono rispettivamente

$$\ddot{x}_1(t) + \omega^2 x_1(t) = 0.$$

$$\ddot{x}_2(t) + \omega^2 x_2(t) = 0,$$

allora anche la somma $x_{tot}(t) = x_1(t) + x_2(t)$ sarà soluzione della stessa equazione. Per dimostrarlo basta sommare le due

$$\ddot{x}_2(t) + \ddot{x}_1(t) + \omega^2 \underbrace{[x_2(t) + x_1(t)]}_{x_{tot}(t)} = 0,$$

e ricordare che le derivate sono distributive

$$\frac{d^2}{dt^2} x_2(t) + \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{[x_2(t) + x_1(t)]}_{x_{tot}(t)}.$$

Otteniamo quindi

$$\ddot{x}_{tot}(t) + \omega^2 x_{tot}(t) = 0.$$

Questa proprietà è una delle più potenti della fisica, ed è il *principio di sovrapposizione delle soluzioni*. Un primo esempio di questa potenza è che possiamo studiare il problema dell'oscillatore armonico generico per qualsiasi condizione iniziale di ampiezza e velocità, ad esempio scrivendo la soluzione generica come

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (1.4)$$

dove abbiamo introdotto due ampiezze A e B che varieranno in base alle condizioni iniziali $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

Studiamo il problema in cui lasciamo partire la massa dopo aver tirato la molla di L_0 e averle dato una spinta iniziale con una velocità v_0 . Il problema che ci si pone

davanti è quindi il seguente:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \\ x(0) = L_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}.$$

Valutando la (1.4) al tempo $t = 0$ troviamo

$$x(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A = L_0.$$

Calcolando la derivata di (1.4) dopo aver sostituito il valore trovato per A si ha

$$\dot{x}(t) = -L_0 \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t).$$

e calcolando al tempo $t = 0$

$$\dot{x}(0) = +B \omega \cos(\omega t) = v_0 \quad \rightarrow \quad B = \frac{v_0}{\omega},$$

per cui la soluzione del nostro problema specifico è

$$x(t) = L_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Esercizio 1.3 Usando il principio di sovrapposizione (1.4) per il problema di una massa con $x(0) = L_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, calcola il valore della sua velocità istantanea al tempo $t = \frac{\pi}{6\omega}$.

Dopo tutta la matematica di rito, veniamo al succo del discorso sull'oscillatore armonico. Il punto fondamentale è fissare in testa la struttura formale della (1.3). Nel caso della molla infatti $x(t)$ rappresenta la traiettoria nel tempo³, tuttavia l'equazione dell'oscillatore può ricorrere in fisica sotto le vesti più disparate. In generale qualsiasi funzione $G = G(t)$ dipendente dal tempo che soddisfi un'equazione del tipo

$$\ddot{G}(t) + \gamma G(t) = 0, \quad (1.5)$$

³Il nostro problema vive solo sull'asse x per semplicità, ma potremmo ripetere il ragionamento identico per $y(t)$ e $z(t)$ se la forza elastica fosse diretta lungo questi assi.

può essere chiamata *oscillatore armonico*. Non importa cosa rappresenti $G(t)$, questo andrà visto in base al contesto fisico, la cosa importante è che se soddisfa l'equazione di un oscillatore armonico, allora la struttura stessa dell'equazione ci dirà qual è la frequenza ω del problema che stiamo studiando. Basta associare visivamente la (1.3) con (1.5) e ricaviamo

$$\omega = \sqrt{\gamma}.$$

Infatti durante la risoluzione dei problemi di fisica si giunge sempre prima o poi a un'equazione che coinvolge le derivate delle funzioni che vogliamo trovare, per cui è motivo di gioia se si scopre che l'equazione a cui obbediscono è proprio quella di un oscillatore armonico, perché è l'equazione più semplice in assoluto.

In generale si trova che tantissimi sistemi fisici sono in prima approssimazione degli oscillatori armonici, il primo esempio lo troveremo nel prossimo capitolo quando parleremo del pendolo semplice, e in tale contesto capiremo anche il significato del gergo “*in prima approssimazione*”. Per ora concentriamoci sulla grande quantità di fisica contenuta dentro la semplicissima (1.3) che riscriviamo qui per comodità

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

Abbiamo visto che questa equazione è risolta da una funzione oscillante come $\sin(\omega t)$, per cui la costante ω^2 può essere interpretata come il quadrato di una frequenza⁴. Nella nostra derivazione avevamo trovato per la molla

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

cioè una massa oscilla tanto più rapidamente quanto più è forte la costante elastica k della molla, e quanto più è leggera la massa m . Un punto molto interessante è che invece ω non dipende dall'ampiezza iniziale dell'oscillazione, come invece potevamo aspettarci sulla base della nostra esperienza quotidiana. Questo è il motivo per il nome “oscillatore armonico”:

⁴A rigore essendo ω dentro l'argomento di $\sin(\omega t)$ è inteso che sia misurata in radianti/secondo, mentre una frequenza è misurata in 1/secondo. Per convertire dai radianti basta ricordare che $\omega = 2\pi f$.

si ha l'*isocronismo delle oscillazioni*. Molti sistemi oscillanti, come vedremo, rompono l'isocronismo (il primo esempio sarà proprio il pendolo semplice), ma possono essere visti come "armonici" in prima approssimazione.

Esercizio 1.4 *Un certo problema di fisica è descritto dalla coordinata $z(t)$. Approssimando l'equazione di Newton $F = ma$ si giunge alla seguente equazione differenziale*

$$m\beta^2\gamma\ddot{z}(t) + gz(t) = 0.$$

Dove β, γ, m, g sono delle costanti. Riconducendoti alla forma standard dell'equazione dell'oscillatore armonico, sai indovinare quale sia la frequenza del moto del problema in questione?

1.3 Alla ricerca degli invarianti

Il risultato dell'armonicità è che se tendiamo la molla per distanze sempre maggiori, otterremo sempre lo stesso numero di oscillazioni al secondo, solo che a differenza di prima la massa dovrà percorrere spazi maggiori in un periodo fissato, per cui dovrà aumentare la sua velocità. A questo punto vale la pena soffermarsi sul fatto che quanto abbiamo appena affermato è una proprietà intrinseca del nostro sistema, cioè non dipende da quali coordinate abbiamo usato per calcolarla. Al contrario la traiettoria $x(t)$ calcolata con l'equazione (1.3) dipende ovviamente dal sistema di coordinate che abbiamo scelto. Ad esempio potremmo ruotare i nostri assi cartesiani con una rotazione di angolo θ sul piano $x - y$ attorno all'asse z con la seguente trasformazione:

$$(x(t), y(t), z(t)) \implies (x^*(t), y^*(t), z(t)),$$

dove x e y sono trasformati come

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

e quindi ad esempio $x^*(t) = x(t) \cos \theta + y(t) \sin \theta$: il risultato in soldoni è che la velocità sul nuovo asse x^* che usiamo per

misurare sarà ora influenzata da un fattore $\cos \theta$ rispetto a prima.

Infatti in precedenza tutta la velocità della massa era proiettata sul vecchio asse x , ora con la rotazione è stata “distribuita” anche sull’asse $y^*(t)$. Naturalmente la velocità del corpo deve essere indipendente da quale sistema di coordinate scegliamo, per cui si apprezza molto bene l’importanza di non confondere le componenti della velocità v_x, v_y, v_z , con il modulo della velocità

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

che è l’unica quantità che non deve dipendere da come scegliamo i nostri assi.

Verifichiamo quanto detto per la rotazione di angolo θ fatta sopra. Notiamo che avendo ruotato solo x e y , la coordinata z rimane invariata. Si ha d’altra parte

$$x^*(t) = x(t) \cos \theta + y(t) \sin \theta.$$

$$y^*(t) = -x(t) \sin \theta + y(t) \cos \theta.$$

e quindi calcoliamo le velocità facendo le derivate

$$\dot{x}^*(t) = \dot{x}(t) \cos \theta + \dot{y}(t) \sin \theta.$$

$$\dot{y}^*(t) = -\dot{x}(t) \sin \theta + \dot{y}(t) \cos \theta.$$

Sommiamo i quadrati per ottenere $v_{x^*}^2 + v_{y^*}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t)^2 + \dot{y}^*(t)^2 &= \dot{x}(t)^2 \cos^2 \theta + \dot{y}(t)^2 \sin^2 \theta + \cancel{2\dot{x}(t)\dot{y}(t)\sin \theta \cos \theta} + \\ &\quad + \dot{x}(t)^2 \sin^2 \theta + \dot{y}(t)^2 \cos^2 \theta - \cancel{2\dot{x}(t)\dot{y}(t)\sin \theta \cos \theta}. \\ &= \dot{x}(t)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \dot{y}(t)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Per cui otteniamo l’identità

$$\dot{x}^*(t)^2 + \dot{y}^*(t)^2 = \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2,$$

e se includiamo $\dot{z}(t)^2$ abbiamo dimostrato che il modulo della velocità è, come si dice in gergo, *invariante per rotazione*.

Ai fisici piace lavorare con quantità che non dipendono dal sistema di coordinate, note come *quantità scalari*. Il